



- قرّرت وزارة التربية والتعليم تدريس
- هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الرِّياضيَّات

للصّف الثاني الثانوي
قسم العُلوم الطبيعية
الفصْل الدِّراسيّ الأول

تأليف

د. سلمان عبد الرحمن السلمان — د. محمد عبد الرحمن القويز

د. فوزي أحمد الذكير — د. عبد الله محمد الراشد

د. صالح السنوسي — أ. محمد أمين شاكر

د. محمد عبد الرحمن القاضي — أ. فاروق عبد الرزاق الحدبان

طبعة ١٤٢٧هـ -١٤٢٨هـ
٢٠٠٦م -٢٠٠٧م

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
السعودية ، وزارة التربية والتعليم
الرياضيات : للصف الثاني الثانوي : قسم العلوم الطبيعية الفصل الدراسي الأول ـ ط٥ ـ الرياض،
... ص ؛ ... سم
ردمك : ٩ – ٢٢٢ – ١٩ – ٩٩٦٠ (مجموعة)
٧ – ٢٢٣ – ١٩ – ٩٩٦٠ (ج١)
١ – الرياضيات – كتب دراسية ٢ – التعليم الثانوي – السعودية – كتب دراسية أ – العنوان
ديوي ٥١٠,٧١٢ ١٩/٢١٨٦

رقم الإيداع : ١٩/٢١٨٦
ردمك : ٩ – ٢٢٢ – ٩٩٦٠ (مجموعة)
٧ – ٢٢٣ – ٩٩٦٠ (ج١)

أشرف على الإعداد و الإنتاج



لهذا الكتاب قيمة مهمة وفائدة كبيرة فحافظ عليه واجعل نظافته تشهد على حسن سلوكك معه .....

إذا لم تحتفظ بهذا الكتاب في مكتبتك الخاصة في آخر العام للاستفادة فاجعل مكتبة مدرستك تحتفظ به .....

موقع الوزارة
www.moe.gov.sa
موقع الإدارة العامة للمناهج
www.moe.gov.sa/curriculum/index.htm
البريد الإلكتروني للإدارة العامة للمناهج
curriculum@moe.gov.sa

مـقــــدمــة

الحمد لله رب العالمين، علم بالقلم، علم الإنسان ما لم يعلم، والصلاة والسلام على من بعثه الله تعالى معلمًا فأخرج الناس من الظلمات إلى النور، سيدنا محمد سيد الأولين والآخرين وعلى آله وصحبه أجمعين.

أما بعد: فإننا نقدم لأبنائنا الطلبة في الصف الثاني الثانوي- قسم العلوم الطبيعية- الجزء الأول من كتاب الرياضيات، وفق المنهج الجديد الذي اعتمدته وزارة التربية والتعليم، والذي تمت مناقشته في ندوة ضمت ممثلين للجامعات السعودية وعددًا من المربين والباحثين والميدانيين (من معلمين وموجهين) من مناطق مختلفة من المملكة، وذلك خلال المدة (٩-١٠) من جمادى الآخرة لعام ١٤٠٦هـ، جاء هذا الكتاب مبنيًّا على كتاب الصف الأول الذي بدئ بتدريسه عام ١٤١٤هـ/ ١٤١٥هـ الدراسي، وعلى النهج نفسه فزودناه- ما أمكن- بالتدريبات المباشرة وحاولنا ربط المفاهيم والمهارات بحياة الطالب العملية وما يتلقاه من مختلف المواد الدراسية وما في هذا العصر من معطيات تقنية بالإضافة إلى تراثنا المشرق وحضارتنا الإسلامية الزاهرة.

البـاب الأول : العمليات الثنائية والزمرة .

الباب الثاني : المصفوفات والمحددات .

الباب الثالث : حساب المثلثات .

الباب الرابع : الأعداد المركبة .

وقد تم عرض ماورد في هذا الكتاب بشكل يساعد الطالب على التعلم الذاتي ، لذا فقد بنيت المعلومات الجديدة على معلومات الطالب السابقة ، وتم إيضاحها من خلال أمثلة متنوعة ، لعلها تساعد الطالب على استيعاب هذه المعلومات ، ونصيحتنا إلى طلابنا أن يجعلوا هذا الكتاب مرجعهم في التعلم والمذاكرة ، ونهيب بإخواننا المعلمين أن يوجهوهم إلى ذلك ، وأن يتجنبوا استبدال الملخصات بما في هذا الكتاب ، لأن اعتماد الطالب على الملخصات التي يعدها له غيره - حتى ولو كان معلمه - يورثه المحدودية في التفكير .

أملنا أن تصلنا من إخواننا المعلمين ملحوظاتهم مفصلة - من خلال التطبيق الميداني - شاكرين لهم تعاونهم البناء ، وآخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين وصلى الله على سيدنا محمد وعلى آله وصحبه ومن تبعه باحسان إلى يوم الدين .

الرياض في ٢١ من ذي القعده ١٤١٣ هـ .

المؤلفــون

الفهـــــــرس

الموضـــــوع	الصفحـة



العمليات الثنائية والزُّمـــرة

١ – ١ تمهـيد .

١ – ٢ العمليات الثنائية .

١ – ٣ الجداول والعمليات الثنائية .

١ – ٤ خاصة الإبدال .

١ – ٥ خاصة التجميع .

١ – ٦ العنصر المحايد .

١ – ٧ النظير .

١ – ٨ الزّمرة وخواصها .

١ – ٩ الزّمر الدائرية .

١ – ١٠ النظام ذو العمليتين الثنائيتين .

١ - ١ تمهيد

سبق لك التعرّف على التطبيقات ، ورأيت أن علاقة كالممثّلة سهمياً بالشكل (١ - ١) تدعى تطبيقاً :

مجاله المجموعة س = { أ ، ب ، جـ }

ومجاله المقابل المجموعة ص = { ١ ، ٢ ، ٣ }

وقد سبق أن سمّينا المخطط السهمي بيان التطبيق ، ذلك البيان الذي سنعبّر عنه بالمجموعة { (أ ، ١) ، (ب ، ٢) ، (جـ ، ٢) }

ومن الواضح لديك أنّ مدى هذا التطبيق هو المجموعة { ١ ، ٢ }

شكل (١ - ١)

وكذلك فإنّ : ر : ح ⟵ ح حيث ر (س) = ٢ س + ٣

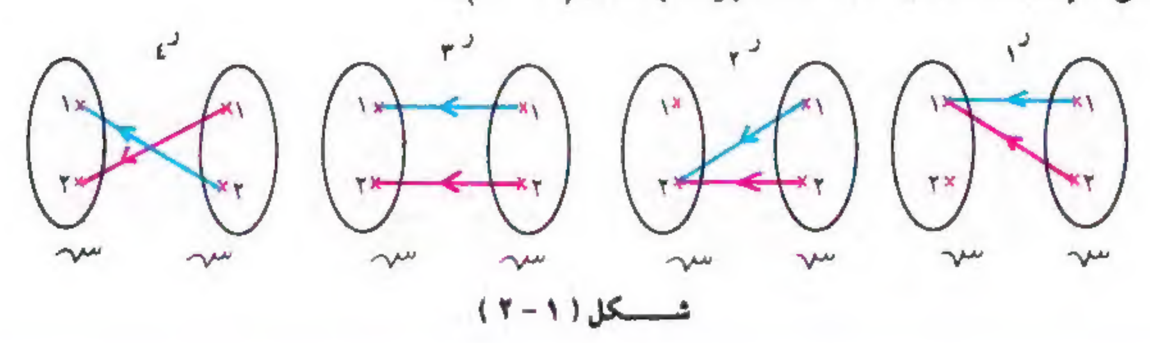
تطبيق مجاله مجموعة الأعداد الحقيقية ح ومجاله المقابل ح وكل عنصر س من المجال يرتبط به مقابله ر (س) = ٢ س + ٣ من المجال المقابل . فالعنصر ٤ ، مثلا ، يرتبط به ر (٤) = ٢ × ٤ + ٣ = ١١

وبصورة عامّة ، فإنّك تستطيع تعريف تطبيق بافتراض :

مجموعة تعتبرها مجالاً ، ومجموعة أخرى ، قد تكون الأولى نفسها ، تعتبرها مجالاً مقابلاً ، وبيان (أو قاعدة للربط بين المجموعتين) على أن يكون :

لكل عنصر من المجال مقابل واحد (وواحد فقط) في المجال المقابل .

فلو أردت مثلاً ، تعريف تطبيق مجاله س = { ١ ، ٢ } ومجاله المقابل س نفسها لحصلت على ٤ إمكانات تمثّلها المخططات المبيّنة بالشكل (١ - ٢) .



شكل (١ - ٢)

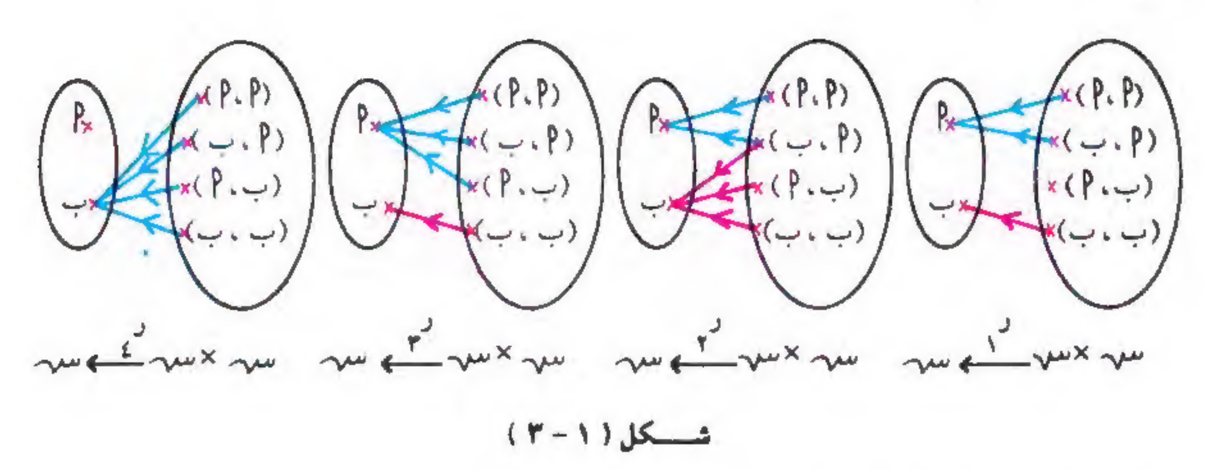
تعال نبحث عن نمط آخر من التطبيقات :

لتكن لدينا المجموعة سـ = { أ ، ب }

فيكون الجداء الديكارتي : سـ × سـ = { (أ ، أ) ، (أ ، ب) ، (ب ، أ) ، (ب ، ب) }

فلو اتَّخذت المجموعة سـ × سـ مجالاً لعلاقة مجالها المقابل سـ ،

فإنَّ بإمكانك الحصول على نماذج من تلك العلاقة ، موضح بعضها بالمخططات المبيَّنة بالشكل (١ - ٣) :



شـكل (١ - ٣)

ولو رجعت إلى تعريف التطبيق وهو :

« لكل عنصر (وهو هنا زوج مرتب) من المجال ،مقابل واحد فقط في المجال المقابل » لوجدت أن كلاً من العلاقتين ر٣ ، ر٤ تطبيق مجاله سـ × سـ ومجاله المقابل سـ . بينما العلاقة ر١ ليست تطبيقاً لأن العنصر (ب ، أ) من المجال ليس له مقابل ، وكذلك العلاقة ر٢ ليست تطبيقاً لأن العنصر (أ ، ب) له أكثر من مقابل .

تدريب (١ - ١)

أوجد مدى كلٍ من التطبيقين ر٣ ، ر٤ وحدِّد نوع كل منهما (شامل ، متباين) . هل يمكن إيجاد تقابل من سـ × سـ إلى سـ ؟ ولماذا ؟ هل يمكن إيجاد تطبيق متباين ؟ ولماذا ؟ .

١ - ٢ العمليات الثنائية

(١) إذا رجعت إلى ما تعلمته في المراحل السابقة وما درجنا على تسميته بالعمليات الأربع وهي الجمع والطرح والضرب والقسمة على المجموعات العددية ، فإنك ستتذكر أنّه :

* بجمع أي عنصرين من مجموعة الأعداد الكلية ك نحصل على عنصر من ك ، فمثلاً : ٥ + ٤ = ٩ ، أي أن عملية الجمع تُمكّننا من أن نقابل كل عددين كلّيين بعدد كلّي نسمّيه مجموعهما ، فنكتب :

$$(٥ ، ٤) \longmapsto ٩ \text{ ، وكذلك } (٢ ، ٠) \longmapsto ٢$$

وبصورة عامة : لكل (أ ، ب) $\in$ ك × ك مقابل حـ هو (أ + ب) ينتمي إلى ك

يتعين بذلك تطبيق مجاله ك × ك ومجاله المقابل ك والذي هو عملية الجمع المعرّفة على ك والتي تقرن كل زوج مرتب (أ ، ب) $\in$ ك × ك بعنصر وحيد حـ = أ + ب $\in$ ك .

وهذا العنصر - كما تعلم - ندعوه : ناتج جمع العددين أ و ب (أو مجموعهما) . نعبر عن هذا التطبيق (أو هذه العملية) على النحو الآتي :

$$\left\{\begin{array}{l} + : \text{ك} \times \text{ك} \longrightarrow \text{ك} \\ (\text{أ} ، \text{ب}) \longmapsto \text{أ} + \text{ب} \end{array}\right. \quad (١ - ١)$$

* وكذلك فإنّ التطبيق

$$\left\{\begin{array}{l} - : \text{ص} \times \text{ص} \longrightarrow \text{ص} \\ (\text{أ} ، \text{ب}) \longmapsto \text{أ} - \text{ب} \end{array}\right. \quad (١ - ٢)$$

هو عملية الطرح المعرّفة على مجموعة الأعداد الصحيحة ص والتي تقرن كل زوج مرتب (أ ، ب) $\in$ ص × ص بعنصر جـ = أ - ب $\in$ ص (وهو ناتج طرح العدد ب من العدد أ)

* **وبالمثل فإن التطبيق :**

$$\times : ن \times ن \longrightarrow ن \quad \left\{ (أ ، ب) \longmapsto أ \times ب \right. \quad (١ - ٣)$$

هـو عمـلية الضرب المعرَّفـة على مجمـوعة الأعـداد النسبـية ن **والتي تقرن كل زوج مرتـب (أ ، ب) ∈ ن × ن بعنصر وحيد** د = أ × ب ∈ ن (وهو مانسمِّيه ناتج ضرب أ وَ ب أو جداء أ وَ ب)

* **والتطبيق :**

$$\div : ح^* \times ح^* \longrightarrow ح^* \quad \left\{ (أ ، ب) \longmapsto أ \div ب \right. \quad (١ - ٤)$$

(حيث ح* مجموعة الأعداد الحقيقية ح محذوفاً منها الصفر) هو عملية القسمة المعرَّفة على ح* **والتي تقرن كل زوج مـرتب (أ ، ب) ∈ ح* × ح* بعنـصر وحـيد** جـ = أ ÷ ب = $\frac{أ}{ب}$ ∈ ح*

(وهو ناتج قسمة أ على ب) .

أما التطبيق :

$$\div : ط \times ط \longrightarrow ن \quad \left\{ (أ ، ب) \longmapsto أ \div ب \right. \quad (١ - ٥)$$

فهـو عمـلية القسـمة على مجـموعة الأعداد الطبيعيـة ط الـتي تقـرن كل زوج مرتـب (أ ، ب) ∈ ط × ط بعنصر وحيد جـ = أ ÷ ب = $\frac{أ}{ب}$ ∈ ن . لاحظ هنا أنه لايمكنك اعتبار العملية « ÷ » تطبيقاً مجاله ط × ط ومجاله المقابل ط لأن $\frac{أ}{ب}$ قد لاينتمي إلى ط ،

فمثـلاً :

(٤ ، ٥) ∈ ط × ط بينما $\frac{٤}{٥}$ ∉ ط .

لعلك تلاحظ أنه في كل من التطبيقات (العمليات) (١ – ١) إلى (١ – ٤) كان المجال هو

الجداء الديكارتي للمجموعة المعرَّف عليها التطبيق والمجال المقابل هو المجموعة نفسها (ونعبِّر عن ذلك بقولنا إن جميع نواتج العملية تنتمي إلى المجموعة نفسها) .

أما في التطبيق (١ - ٥) فإنه بالرغم من أن المجال هو الجداء الديكارتي للمجموعة ط إلا أن المجال المقابل ، كما رأينا ، لايساوي ط (ونعبر عن ذلك بقولنا إن نواتج العملية قد لاتنتمي إلى المجموعة نفسها).

تدريب (١ - ٢)

عبِّر عن كل عملية فيما يلي كتطبيق ، على النحو الذي رأيت في هذا البند ، بحيث يكون المجال المقابل ، إن أمكن ، هو المجموعة نفسها .

(١) عملية الجمع على صہ .

(٢) عملية الطرح على ط .

(٣) عملية الضرب على ح

(٤) عملية القسمة على ن* ، حيث ن* = ن - { ٠ } .

(٢) إن التطبيق الجديد الذي تعرّفت عليه من خلال الأمثلة السابقة والذي مجاله الجداء الديكارتي سہ × سہ ومجاله المقابل سہ ندعوه : عملية ثنائية على سہ .

فالتطبيق (١ - ١) هو عملية ثنائية على ك

والتطبيق (١ - ٢) هو عملية ثنائية على صہ

والتطبيق (١ - ٣) هو عملية ثنائية على ن

والتطبيق (١ - ٤) هو عملية ثنائية على ح* .

أمّا التطبيق الذي مجاله سہ × سہ (سہ $\neq \emptyset$) ومجاله المقابل مجموعة أخرى ع $\neq$ سہ فإننا لاندعوه عملية ثنائية على سہ ، فمثلاً ، التطبيق :

$$- : ك \times ك \longrightarrow ص \atop (أ ، ب) \longmapsto أ - ب$$ ليس عملية ثنائية على ك .

وعليه نستطيع تقديم تعريف العملية الثنائية :

تعريف (١ - ١) :

إذا كانت سـ مجموعة غير خالية ، فإننا نسمي أي تطبيق مجاله الجداء الديكارتي سـ × سـ ومجاله المقابل سـ عملية ثنائية معرّفة على سـ .

تدريب (١ - ٣)

أي العلاقات الواردة في التدريب (١ - ٢) هي عملية ثنائية ؟ ولماذا ؟

(٣) ليس من الضروري أن تكون العملية الثنائية إحدى العمليات الأربع (+ ، - ، × ، ÷) فإذا لم يكن للعملية رمز مستخدم عادة ، فإننا نرمز لها بأحد الرموز * ، △ ، ▽ ، ⊙ ، ⊛ ، ..... الخ .

كما سيظهر في الأمثلة القادمة إن شاء الله .

تعريف (١ - ٢) :

إذا كانت سـ مجموعة غير خالية وكان * تطبيقاً مجاله سـ × سـ ومجاله المقابل ع فإننا نعبّر عن ذلك ، أحياناً ، بالزوج المرتب (سـ ، *) وندعوه نظاماً ذا عملية وإذا كانت ع ⊆ سـ فإن الزوج (سـ ، *) يُدعى نظاماً ذا عملية ثنائية أو نظاماً مغلقاً .

يلاحظ من التعريفين (١ - ١) ، (١ - ٢) ما يلي :

(١) تكافؤ العبارات الآتية : (أ) * (وتقرأ العملية نجمة) عملية ثنائية معرّفة على سـ

(ب) (سـ ، *) نظام ذو عملية ثنائية (جـ) (سـ ، *) نظام مغلق .

(٢) تكافؤ العبارتين : « (سـ ، *) نظام ذو عملية » وَ « * تطبيق مجاله سـ × سـ ومجاله المقابل مجموعة ما ، ع ، قد لا تكون محتواة في سـ » .

مثال (١ ١) :

(١) إذا كانت $*$ معرّفة على ن كما يلي :

$$ P * ب = \frac{P + ب}{٢} $$

فإن (ن ، $*$) نظام مغلق ، لأن $\frac{P + ب}{٢} \in$ ن ، لأي عددين P ، ب $\in$ ن .

(٢) إذا وضعنا المجموعة ك مكان المجموعة ن في (١) فإننا نلاحظ أن (ك ، $*$) نظام ذو عملية ولكنه ليس نظاماً مغلقاً ، فمثلاً : $٢ * ٣ = \frac{٢ + ٣}{٢} = \frac{٥}{٢} \notin$ ك

مثال (١ ٢) :

إذا كانت سـ = { ١ ، ٢ } فإن

$سـ^٢$ = سـ × سـ = { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) }

(١) يمكن تعريف عملية ثنائية $\otimes$ على سـ كما يلي

١ $\otimes$ ١ = ١ ، ١ $\otimes$ ٢ = ٢ ، ٢ $\otimes$ ١ = ١ ، ٢ $\otimes$ ٢ = ١

لاحظ أن (سـ ، $\otimes$) نظام مغلق ، كما أن ١ $\otimes$ ٢ $\neq$ ٢ $\otimes$ ١

(٢) يمكن تعريف عملية ثنائية أخرى على سـ ، ولتكن $*$ ، كما يلي .

١ $*$ ١ = ١ ، ١ $*$ ٢ = ٢ ، ٢ $*$ ١ = ٢ ، ٢ $*$ ٢ = ١

لاحظ أن (سـ ، $*$) نظام مغلق وأن ١ $*$ ٢ = ٢ $*$ ١ .

تدريب (١ - ٤)

عيِّن عملية ثنائية على سـ في المثال (١ - ٢) مختلفة عن العمليتين $\otimes$ ، $*$ الواردتين في ذلك المثال

مثال (١-٣) :

لنعرف عملية $\otimes$ على ك كما يلي

$P \otimes ب = P^٢ + ب^٢$

إن (ك ، ⊗) نظام مغلق ، لأن $أ^٢ + ب^٢ \in$ ك ، أي أن مجموع مربعي عددين كليين هو عدد كلي .

وتجدر الإشارة هنا إلى أن العملية الثنائية ⊗ في هذا المثال معرفة بالقاعدة :

$$أ \otimes ب = أ^٢ + ب^٢$$

بينما العمليتان * ، ⊗ في المثال (١ - ٢) معرفتان بتحديد صورة كل زوج مرتب على حدة .

مثال (١-٤) :

لتكن سہ مجموعة المجموعات الجزئية للمجموعة { أ ، ب ، حـ } ، أي أن :

سہ = { ∅ ، { أ } ، { ب } ، { حـ } ، { أ ، ب } ، { أ ، حـ } ، { ب ، حـ } ، { أ ، ب ، حـ } }

وتدعى سہ مجموعة أجزاء المجموعة { أ ، ب ، حـ } .

(١) لاحظ أن اتحاد كل عنصرين من عناصر سہ عنصر ينتمي إلى سہ أي أن عملية الاتحاد « ∪ » على سہ هي عملية ثنائية وهذا يعني أن (سہ ، ∪) نظام مغلق ، فمثلاً :

{ أ } ∪ { أ ، حـ } = { أ ، حـ } ، ∅ ∪ { ب } = { ب } ،

{ أ ، ب } ∪ { حـ } = { أ ، ب ، حـ } .

(٢) إذا كانت $سہ_١$ = { ∅ ، { أ } ، { ب } ، { حـ } ، { أ ، ب } ، { أ ، حـ } ، { ب ، حـ } } .

وتدعى $سہ_١$ مجموعة المجموعات الجزئية الفعلية للمجموعة { أ ، ب ، حـ }

فإن ($سہ_١$ ، ∪) نظام غير مغلق ، أي أن « ∪ » ليست عملية ثنائية على $سہ_١$ لأن

{ أ } ∪ { ب ، حـ } = { أ ، ب ، حـ } $\notin$ $سہ_١$

مثال (١-٥) :

إذا كانت ط = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، .... } وعرفنا عملية △ على ط على النحو الآتي : -

لأي عددين س ، ص $\in$ ط فإن :

س $\triangle$ ص = القاسم المشترك الأكبر للعددين س ، ص . فمثلاً :

٢٥ $\triangle$ ١٥ = ٥ ، ٣٨ $\triangle$ ١٩ = ١٩ ، ٦٥ $\triangle$ ١٧ = ١ ، وهكذا .. إن (ط ، $\triangle$) نظام مغلق .

تدريب (١ – ٥)

(أ) بالنسبة للعملية $\triangle$ في المثال (١ – ٥) أكمل مايلي :

٣٦ $\triangle$ ٦٣ = ... ، ١٠٢ $\triangle$ ١٧ = ...

(ب) ناقش صحة كلٍّ من العبارتين التاليتين :

(١) إذا كان (سـ ، *) نظاماً مغلقاً فإن (سـ ، *) نظام ذو عملية .

(٢) إذا كان (سـ ، *) نظاماً ذا عملية فإن (سـ ، *) نظام مغلق .

تـمارين (١ – ١) :

(١) إذا كانت $\otimes$ عملية ثنائية معرفة على صـ كما يلي :

س $\otimes$ ص = س^2 + ص^2 – س

فأوجــد :

(أ) ٣ $\otimes$ ٤ ، ٤ $\otimes$ ٣ ، (–١٣) $\otimes$ ٧ ، ٧ $\otimes$ (–١٣)

(ب) س حيث س $\otimes$ ٣ = ١١

(٢) إذ كان س $\triangledown$ ص هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين س ، ص $\in$ ط فاحسب قيمة

١٢ $\triangledown$ ٦ ، ١٥ $\triangledown$ ١٥ ، ٣٦ $\triangledown$ ١٢

هل $\triangledown$ عملية ثنائية على ط ؟ ولماذا ؟

(٣) إذا اعتبرنا التعريفين الواردين في التمرين (٢) والمثال (١ – ٥) للعمليتين الثنائيتين $\triangledown$ ، $\triangle$ على المجموعة ط فاحسب قيمة

٢٢ $\triangledown$ (١٥ $\triangledown$ ٣) ، (٣٦ $\triangledown$ ٣) $\triangledown$ ٤ ، ٥٥ $\triangledown$ (٢٥ $\triangle$ ٥) ،

(٦٦ $\triangledown$ ٣٠) $\triangle$ (٦٤ $\triangledown$ ١٠) ، (١٢٨ $\triangle$ ٨) $\triangledown$ (٢٥٦ $\triangle$ ٦٤) .

(٤) فيما يلي عمليات على المجموعة سہ = { ٤ ، ٥ } . اذكر العمليات الثنائية منها ، معللاً إجابتك :

(أ) ٤ ر١ ٤ = ٤ ، ٤ ر١ ٥ = ٤ ، ٥ ر١ ٤ = ٥ ، ٥ ر١ ٥ = ٦

حيث ر١ ترمز للعملية على سہ .

(ب) ٤ ر٢ ٤ = ٤ ، ٤ ر٢ ٥ = ٥ ، ٥ ر٢ ٤ = ٤ ، ٥ ر٢ ٥ = ٥

(جـ) ٤ ر٣ ٤ = ٥ ، ٤ ر٣ ٥ = ٤ ، ٥ ر٣ ٤ = ٥ ، ٥ ر٣ ٥ = ٥

(٥) هل النظام (ك ، −) مغلق ؟ ولماذا ؟

(٦) عرِّف خمس عمليات ثنائية مختلفة على المجموعة { ٩ ، ١١ } .

١-٣ الجداول والعمليّات الثنائية

إذا كانت المجموعة التي عُرِّفت عليها عملية ثنائية تتكون من عدد محدود من العناصر ، فإنه يمكن تمثيل العملية الثنائية بجدول .

وبالرجوع إلى المثال (١ − ٢) يمكن أن نمثل العملية الثنائية ⊗ بالجدول الآتي :

⊗	١	٢
١	١	٢
٢	١	١

جدول (١ − ١)

لاحظ أن العناصر التي ظهرت في الجدول جميعها تنتمي إلى سہ = { ١ ، ٢ } التي عرِّفت عليها العملية الثنائية .

مثال (١-٦) :

إذا كانت سہ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } وعرَّفنا عليها عملية * كما يأتي :

لكل س ، ص ∈ سہ فإن س * ص = القاسم المشترك الأكبر للعددين س ، ص .

فاثبت أن العملية * ثنائية على سہ .

الحل :

ننظِّم الجدول (١ − ٢) الذي سيعطينا القاسم المشترك الأكبر لأي عددين من سہ .

نلاحظ أن (سـ ، *) نظام مغلق ، حيث إن س * ص ∈ سـ لكل س ، ص ∈ سـ

إذن * عملية ثنائية على سـ.

مثال (١-٧) :

أنشئ جدول عملية النظام (سـ ، *)

إذا علمت أن سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ } وأنه لكل أ ، ب ∈ سـ

فإن أ * ب = أ^ب ، وهل (سـ ، *) نظام مغلق مع التعليل ؟

*	١	٢	٣	٤
١	١	١	١	١
٢	١	٢	١	٢
٣	١	١	٣	١
٤	١	٢	١	٤

جدول (١ - ٢)

الحل :

الجدول (١ - ٣) هو جدول العملية * .

وحيث إن الأعداد : ٢ * ٢ = ٢^٢ = ٤ ،

٢ * ٣ = ٢^٣ = ٨ ، ٣ * ٢ = ٣^٢ = ٩ ،

٣ * ٣ = ٣^٣ = ٢٧ التي ظهرت في الجدول لاتنتمي إلى سـ

فإن العملية * ليست ثنائية على سـ ، أي أن (سـ ، *) نظام غير مغلق .

*	١	٢	٣
١	١	١	١
٢	٢	٤	٨
٣	٣	٩	٢٧

جدول (١ - ٣)

لاحظ أنه يكفي لكون النظام (سـ ، *) غير مغلق ظهور عدد واحد فقط بحيث أ * ب = أ^ب ∉ سـ

مثال (١-٨) :

إذا كانت سـ = { ١ ، ٢ } فإنك تعلم أن مجموعة أجزاء سـ هي المجموعة سم = { ∅ ، {١} ، {٢} ، { ١ ، ٢ } }

يمكنك أن تتحقق من أن عملية الاتحاد ∪ هي عملية ثنائية على سم وذلك بإنشاء جدول هذه العملية . حاول ذلك ، ستحصل على الجدول (١ - ٤) .

∪	∅	{١}	{٢}	{١ ، ٢}
∅	∅	{١}	{٢}	{١ ، ٢}
{١}	{١}	{١}	{١ ، ٢}	{١ ، ٢}
{٢}	{٢}	{١ ، ٢}	{٢}	{١ ، ٢}
{١ ، ٢}	{١ ، ٢}	{١ ، ٢}	{١ ، ٢}	{١ ، ٢}

جدول (١ - ٤)

تدريب (١ – ٦)

(١) في المثال (١ – ٨) :

(أ) تحقق أنه لأي عنصر صـ ∈ سـ فإن : صـ ∪ ∅ = ∅ ∪ صـ = صـ

وأن صـ ∪ سـ = سـ ∪ صـ = سـ

(ب) ضع ∩ بدلاً من ∪ وأنشئ جدول عملية التقاطع ∩ ، ثم بين ما إذا كان (سـ ، ∩) نظـاماً مغلـقاً أم لا .

(٢) الجدول (١ – ٥) هو جدول العملية ∗ المعرفة على سـ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } تحقق من الآتي

(أ) ∗ عملية ثنائية على سـ

(ب) لأي عنصر أ ∈ سـ فإن : ٠ ∗ أ = أ ∗ ٠ = أ

كما أن أ ∗ أ = ٠

(جـ) لأي عنصرين أ ، ب ، ∈ سـ فإن : أ ∗ ب = ب ∗ أ

ماذا تلاحـظ عن القطر الذي طرفه ∗ للمربع الذي كتب فيه الجدول (١ – ٥) ؟.

∗	٠	١	٢	٣
٠	٠	١	٢	٣
١	١	٠	٣	٢
٢	٢	٣	٠	١
٣	٣	٢	١	٠

جـدول (١ – ٥)

مثال (١-٩) :

لنأخذ المجموعة {٠، ١، ٢، ٣} ولنعرِّف العملية الثنائية ⊕ عليها كالآتي

أ ⊕ ب = { أ + ب إذا كان أ + ب < ٤ ؛ أ + ب – ٤ إذا كان أ + ب ≥ ٤ }

كما يمكن تعريف هذه العملية الثنائية على النحو الآتي :

أ ⊕ ب = باقي قسمة أ + ب على ٤ .

⊕	٠	١	٢	٣
٠	٠	١	٢	٣
١	١	٢	٣	٠
٢	٢	٣	٠	١
٣	٣	٠	١	٢

جـدول (١ – ٦)

وعادة نرمز للمجموعة { ٠، ١، ٢، ٣ } بالرمز صـ٤ ويمكن تمثيل هذه العملية بالجدول (١ – ٦)

مثال (١-١٠) : (جمع الساعات)

إذا كانت الساعة تشير الآن إلى الرابعة فإنه بعد ثلاث ساعات تشير إلى السابعة أي أن :

٤ $\boxplus$ ٣ = ٧

وإذا كانت تشير إلى التاسعة فإنه بعد خمس ساعات تشير إلى الثانية ، أي أن :

٩ $\boxplus$ ٥ = ٢

وإذا كانت الساعة الرابعة فإنه بعد ثمان ساعات نجد أن الساعة تشير إلى الثانية عشرة ، أي أن :

٤ $\boxplus$ ٨ = ١٢

وإذا كانت الساعة الثانية عشرة فإنه بعد ست ساعات نجد الساعة تشير إلى السادسة أي أن :

١٢ $\boxplus$ ٦ = ٦

وإذا كانت الساعة الثانية عشرة فإنه بعد اثنتي عشرة ساعة نجد أن الساعة تشير كذلك إلى الثانية عشرة ، أي أن : ١٢ $\boxplus$ ١٢ = ١٢

وهكذا يمكن الاستمرار بهذه الطريقة ، وسوف نجد أن عملية جمع الساعات عملية ثنائية معرفة على سہ ، حيث : سہ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ }

وهي تخضع للقاعدة الآتية :

أ $\boxplus$ ب = { أ + ب إذا كان أ + ب ≤ ١٢ ،
أ + ب − ١٢ إذا كان أ + ب > ١٢ .

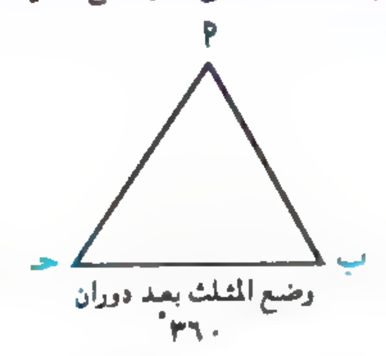
مثال (١-١١) : (تطبيق هندسي)

لنأخذ المثلث أ ب حـ المتطابق الأضلاع الموضح في الشكل (١- ٤) ، حيث « و » ملتقى الأعمدة النازلة من رؤوس المثلث على الأضلاع المقابلة

إذا كانت د$_{١}$ ، د$_{٢}$ ، د$_{٣}$ هي عمليات دوران المثلث أ ب حـ حول « و » بزوايا : صفرْ (أو ٣٦٠ْ) ، ١٢٠ْ ، ٢٤٠ْ على الترتيب في الاتجاه الموجب (أي في عكس اتجاه حركة عقارب الساعة)

شكل (١ - ٤)

فإننا نحصل على الأوضاع الآتية للمثلث أ ب حـ



وضع المثلث بعد دوران
360°



وضع المثلث بعد دوران
120°



وضع المثلث بعد دوران
240°

لعلك تلاحظ أن كلاً من $د_1$ ، $د_2$ ، $د_3$ تطبيق مجاله ومجاله المقابل المجموعة $\{$ أ ، ب ، حـ $\}$

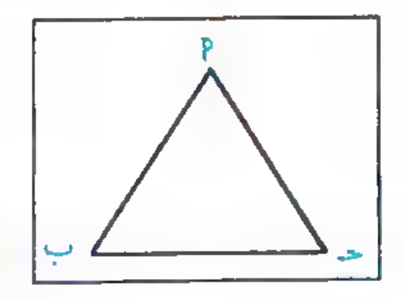
وهي معرّفة كالآتي :

$$د_1 = \begin{pmatrix} أ & ب & حـ \\ أ & ب & حـ \end{pmatrix} ، \quad د_2 = \begin{pmatrix} أ & ب & حـ \\ حـ & أ & ب \end{pmatrix} ، \quad د_3 = \begin{pmatrix} أ & ب & حـ \\ ب & حـ & أ \end{pmatrix}$$

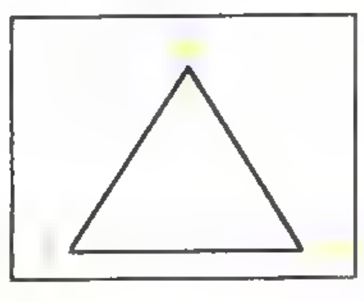
حيث وضعنا صورة كل عنصر تحته في التطبيق المتعلق به ، فمثلاً :

$$د_2 = \begin{pmatrix} أ & ب & حـ \\ د_2(أ) & د_2(ب) & د_2(حـ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ & ب & حـ \\ حـ & أ & ب \end{pmatrix}$$

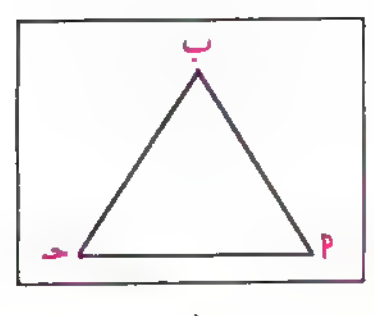
وإذا فرضنا أن $ل_1$ ، $ل_2$ ، $ل_3$ تناظرات المثلث أ ب حـ حول $أأ_1$ ، $بب_1$ ، $حـحـ_1$ على الترتيب فإننا نحصل على الأوضاع الآتية للمثلث أ ب حـ .



وضع
المثلث بعد التناظر
حول $أأ_1$



وضع
المثلث بعد التناظر
حول $بب_1$



وضع
المثلث بعد التناظر
حول $حـحـ_1$

وكذلك فإن $ل_{١}$ ، $ل_{٢}$ ، $ل_{٣}$ هي تطبيقات مجالها ومجالها المقابل المجموعة { أ ، ب ، حـ }
وهي معرفة كالآتي :

$$ل_{١} = \begin{pmatrix} أ & ب & حـ \\ أ & حـ & ب \end{pmatrix} ، ل_{٢} = \begin{pmatrix} أ & ب & حـ \\ حـ & ب & أ \end{pmatrix} ، ل_{٣} = \begin{pmatrix} أ & ب & حـ \\ ب & أ & حـ \end{pmatrix}$$

حيث وضعنا صورة كل عنصر في التطبيق المتعلق به تحته .

إذا فرضنا أن سہ={$د_{١}$، $د_{٢}$ ، $د_{٣}$ ، $ل_{١}$، $ل_{٢}$، $ل_{٣}$} فإنه يمكننا أن نمثل عمليه تحصيل التطبيقات ٥ على المجموعه سہ بالجدول الآتي :

٥	$د_{١}$	$د_{٢}$	$د_{٣}$	$ل_{١}$	$ل_{٢}$	$ل_{٣}$
$د_{١}$	$د_{١}$	$د_{٢}$	$د_{٣}$	$ل_{١}$	$ل_{٢}$	$ل_{٣}$
$د_{٢}$	$د_{٢}$	$د_{٣}$	$د_{١}$	$ل_{٢}$	$ل_{٣}$	$ل_{١}$
$د_{٣}$	$د_{٣}$	$د_{١}$	$د_{٢}$	$ل_{٣}$	$ل_{١}$	$ل_{٢}$
$ل_{١}$	$ل_{١}$	$ل_{٣}$	$ل_{٢}$	$د_{١}$	$د_{٣}$	$د_{٢}$
$ل_{٢}$	$ل_{٢}$	$ل_{١}$	$ل_{٣}$	$د_{٢}$	$د_{١}$	$د_{٣}$
$ل_{٣}$	$ل_{٣}$	$ل_{٢}$	$ل_{١}$	$د_{٣}$	$د_{٢}$	$د_{١}$

جدول (١ - ٧)

واضح من الجدول أن العملية ٥ عملية ثنائية على المجموعة سہ

فيما يلي نوضح طريقة بناء الجدول (١ - ٧) وذلك بحساب $د_{٢}$ ٥ $ل_{١}$:

$$د_{٢} ٥ ل_{١} = \begin{pmatrix} أ & ب & حـ \\ د_{٢} ٥ ل_{١}(أ) & د_{٢} ٥ ل_{١}(ب) & د_{٢} ٥ ل_{١}(حـ) \end{pmatrix}$$

حيث وضعنا صورة كل عنصر تحته في التطبيق $د_{٢}$ ٥ $ل_{١}$ (تذكّر أن $د_{٢}$ ٥ $ل_{١}$ هو تحصيل لتطبيقين $ل_{١}$ ، $د_{٢}$ على الترتيب)

وحيث إن $د_2 \circ ل_1 (أ) = د_2 (ل_1 (أ)) = د_2 (أ) = حـ$ ،

$د_2 \circ ل_1 (ب) = د_2 (ل_1 (ب)) = د_2 (حـ) = ب$

$د_2 \circ ل_1 (حـ) = د_2 (ل_1 (حـ)) = د_2 (ب) = أ$

إذن : $د_2 \circ ل_1 = \begin{pmatrix} أ & ب & حـ \\ حـ & ب & أ \end{pmatrix} = ل_2$

تدريب (١ – ٧)

في المثال (١ – ١١)

(١) أوجد كلاً من الصور الآتية :

$ل_1 \circ د_2 (أ)$ ، $ل_1 \circ د_2 (ب)$ ، $ل_1 \circ د_2 (حـ)$ ، ومن ثم أكمل :

$ل_1 \circ د_2 = \begin{pmatrix} أ & ب & حـ \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} = \ldots\ldots$

(٢) أوجد كلاً من الصور الآتية :

$د_2 \circ ل_1 (أ)$ ، $د_2 \circ ل_1 (ب)$ ، $د_2 \circ ل_1 (حـ)$ ، ومن ثم أكمل :

$د_2 \circ ل_1 = \begin{pmatrix} أ & ب & حـ \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} = \ldots\ldots$

(٣) ماذا تستنتج من (١) ، (٢) ؟

تمارين (١ – ٢)

١ – أي الجداول الآتية يمثل عملية ثنائية على المجموعة { ١ ، ٢ ، ٣ } ؟ ولماذا ؟

⊗	١	٢	٣
١	١	٢	٣
٢	٣	٢	١
٣	٢	٣	١

*	١	٢	٣
١	١	٢	٢
٢	٢	١	١
٣	٢	١	١

△	١	٢	٣
١	١	٢	٣
٢	٢	٤	٥
٣	٣	٢	٢

٢ – إذا عرفنا على المجموعة $ص_٧$ = { ٠، ١، ٢ ، ٣ ، ٤، ٥ ، ٦ } . العمليتين الثنائيتين ⊕ ، ⊙

كالآتـــي :

(١) $أ ⊕ ب = \begin{cases} أ + ب & \text{إذا كان } أ + ب < ٧ ، \\ أ + ب - ٧ & \text{إذا كان } أ + ب \geq ٧ . \end{cases}$

(٢) أ ⊙ ب = باقي قسمة أ ب على ٧

فمثّل هاتين العمليتين في جدولين .

٣ – إذا عرفنا على المجموعة $ص_{١٢}$ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ }

العملية الثنائية ⊕ كالآتي

$أ ⊕ ب = \begin{cases} أ + ب & \text{إذا كان } أ + ب < ١٢ ، \\ أ + ب - ١٢ & \text{إذا كان } أ + ب \geq ١٢ . \end{cases}$

(أ) فالمطلوب : مثّل هذه العملية في جدول .

(ب) أكتب جدولا يمثل العملية الثنائية الواردة في المثال (١ – ١٠)

قارن بين الجدولين .

٤ – عرفنا على المجموعة $ص_{١٢}$ العملية الثنائية ⊙ كالآتي .

أ ⊙ ب = باقي قسمة أ . ب على ١٢

والمطـــلوب :

(أ) مثّل هذه العملية في جدول .

(ب) أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية :

(١) ٢ ⊙ س = ٠ (٢) ٣ ⊙ س = ٣

(٣) ٦ ⊙ س = ١

٥ – لنعتبر العملية الثنائية * المعرفة على المجموعة ح على النحو الآتي :

$س * ص = \frac{١}{٢} س ص$

(أ) أحسب مايلي :

(١) ٢ * ٤ (٢) $\frac{١}{٢}$ * $\frac{٦}{٥}$ (٣) ٢ $\frac{١}{٤}$ * $\frac{٥}{٢}$

(ب) أثبت أن العملية * ليست تطبيقاً متبايناً .

٦ - لنعتبر العملية الثنائية * المعرفة على المجموعة ح على النحو التالي :

$$س * ص = (س - ص)^{٢}$$

(أ) أوجـد :

(١) (٢ * ٣) * $\frac{١}{٢}$ (٢) ٢ * (٣ * $\frac{١}{٢}$)

(ب) أثبت أن * ليست عملية ثنائية على المجموعة ط .

٧ - بالرجوع إلى المثال (١ - ١١) أثبت ما يأتي :

(١) $ل_{١} ∘ ل_{١} = د_{١}$ ، (٢) $ل_{١} ∘ د_{٢} = ل_{٢}$ (٣) $د_{٣} ∘ ل_{٢} = ل_{١}$

١ - ٤ خاصة الإبدال :

نلاحظ في عملية الجمع على المجموعة ك أن :

٣ + ٥ = ٥ + ٣ = ٨ ، ١٧ + ٨ = ٨ + ١٧ = ٢٥

وكذلك بالنسبة لعملية الضرب على ك نلاحظ أن :

٣ × ٥ = ٥ × ٣ = ١٥ ، ١٧ × ٨ = ٨ × ١٧ = ١٣٦

وبصفة عامة .

أ + ب = ب + أ ، أ × ب = ب × أ لكل أ ، ب ∈ ك

أي أنه يمكن المبادلة بين العددين أ ، ب **في عمليتي الجمع والضرب دون تغيّر في ناتج**
العملية ، وبصورة عامة

تعريــف (١ – ٣)

نقول إن العملية الثنائية $*$ على المجموعة سـ إبدالية (أو تبديلية) إذا كان :

$$\text{أ} * \text{ب} = \text{ب} * \text{أ} \quad \text{لكل أ ، ب} \in \text{سـ}$$

وقد نقول إن النظام (سـ ، $*$) إبدالي إذا كانت $*$ إبدالية .

وتكون العمليـة $*$ المعـرفة على سـ غـير إبدالية إذا أمكن إيجـاد عنصرين أ ، ب $\in$ سـ

بحيث : أ $*$ ب $\neq$ ب $*$ أ

ارجــع إلى الأمــثلة (١ – ٢) ، (١ – ٣) ، (١ – ٤) ، (١ – ٥) ، (١ – ٦)

(١ – ٧) ، (١ – ٨) ، (١ – ٩) ، (١ – ١٠) ، (١ – ١١) . وابحث عمّا إذا كانت

العمليات الواردة في هذه الأمثلة إبدالية أم لا .

لعلك توصلت إلى أن جميع العمليات الثنائية الواردة في هذه الأمثلة إبدالية باستثناء :

العملية الثنائية الأولى في المثال (١ – ٢) ، والعملية الثنائية في المثال (١ – ١١) . أما العملية الـواردة في المــثال (١ – ٧) فـهي ليــست إبدالية بالإضـافة إلى كونها ليست عملية ثنائية كما أسـلفنا ، ذلـك لأن :

$$\text{أ} * \text{ب} = \text{أ}^{\text{ب}} \neq \text{ب}^{\text{أ}} = \text{ب} * \text{أ} \quad ، (\text{أ ، ب} \in \text{سـ})$$

فمثلاً إذا كان أ = ٢ ، ب = ٣ فإن

أ $*$ ب = ٢ $*$ ٣ = $٢^٣$ = ٨ في حين أن ب $*$ أ = ٣ $*$ ٢ = $٣^٢$ = ٩

تدريب (١ – ٨)

(١) بيِّن هل عملية الطرح المعرفة على ح عملية ثنائية ؟ وهل هي إبدالية ؟

(٢) بيِّن هل النظام (ح* ، –) مغلق ؟ وهل هو إبدالي ؟

(٣) ادرس النظام (ح$^{+}$ ، ⊙) من حيث كون ⊙ عملية ثنائية على مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ح$^{+}$ ومن حيث كون ⊙ إبدالية ، إذا علمت أن :

أ ⊙ ب = أ^{ب} لكل أ ، ب ∈ ح$^{+}$.

احسب (٢ ⊙ ٣) ⊙ ٢ ، ٢ ⊙ (٣ ⊙ ٢) وقارن الناتجين .

هل تستنتج من ذلك أن (أ ⊙ ب) ⊙ حـ ≠ أ ⊙ (ب ⊙ حـ) بصفة عامة ؟ ولماذا ؟

(٤) استعن بالجدول (١ – ٥) وتحقق أن العملية ∗ التي يمثلها إبدالية

١ – ٥ خاصة التجميع :

بدراسة عمليتي الجمع والضرب على المجموعة ك نلاحظ أن

(٢ + ٣) + ٥ = ٢ + (٣ + ٥) = ١٠ ،

(٢ × ٣) × ٥ = ٢ × (٣ × ٥) = ٣٠ ،

(٧ + ٣) + ٤ = ٧ + (٣ + ٤) = ١٤ ،

(٧ × ٣) × ٤ = ٧ × (٣ × ٤) = ٨٤ ،

وتسمى هذه الخاصة خاصة التجميع (أو الدمج) وهي صحيحة لكل ثلاثة أعداد من ك ،

أيْ أن

(أ + ب) + حـ = أ + (ب + حـ) ،

(أ × ب) × حـ   أ × (ب × حـ) ،

وبصفة عامة نقدم التعريف الآتي

تعريف (١ – ٤) :

نقول إن العملية الثنائية ∗ على المجموعة س تجميعية إذا كان

(أ ∗ ب) ∗ حـ = أ ∗ (ب ∗ حـ) لكل أ ، ب ، حـ ∈ س كما يقال حينئذٍ عن النظام المغلق (س ، ∗) إنه تجميعي

وتكون العملية $*$ المعرفة على س غير تجميعية إذا أمكن إيجاد ثلاثة عناصر أ ، ب ، حـ $\in$ س

بحيث : (أ $*$ ب) $*$ حـ $\neq$ أ $*$ (ب $*$ حـ) .

مثال (١-١٢) :

لنعرّف العملية الثنائية $*$ على المجموعة ص كما يأتي :

أ $*$ ب = أ + ب − هـ ، حيث هـ عدد ثابت من ص :

واضح أن العدد الناتج (أ + ب − هـ) $\in$ ص ، لكل أ ، ب $\in$ ص

وهذا يعني أن $*$ عملية ثنائية على ص .

إذا كان حـ $\in$ ص فإن :

(أ $*$ ب) $*$ حـ = (أ + ب − هـ) $*$ حـ

= (أ + ب − هـ) + حـ − هـ

= أ + ب + حـ − ٢ هـ (١)

ومن جهة أخرى

أ $*$ (ب $*$ حـ) = أ + (ب $*$ حـ) − هـ

= أ + (ب + حـ − هـ) − هـ

= أ + ب + حـ − ٢ هـ (٢)

وبمقارنة (١) ، (٢) نجد أن :

(أ $*$ ب) $*$ حـ = أ $*$ (ب $*$ حـ) لكل أ ، ب ، حـ $\in$ ص .

أي أن $*$ عملية ثنائية تجميعية .

مثال (١-١٣) :

أثبت أن النظام (ك ، $\otimes$) مغلق وغير إبدالي وغير تجميعي ، إذا علمت أن $\otimes$ معرّفة على ك كما يلي :

س $\otimes$ ص = ٢ س + ٣ ص ، لكل س ، ص $\in$ ك .

الحل :

حيث إنه لكل عددين س ، ص $\in$ ك فإن (٢س + ٢ ص) $\in$ ك

إذن (ك ، $\otimes$) نظام مغلق

إن $\otimes$ عملية غير إبدالية لأنه عندما تكون س = ١ ، ص = ٢ نجد :

س $\otimes$ ص = ١ $\otimes$ ٢ = ٢ × ١ + ٣ × ٢ = ٨ ، في حين أن :

ص $\otimes$ س = ٢ $\otimes$ ١ = ٢ × ٢ + ٣ × ١ = ٧

إذن : ١ $\otimes$ ٢ $\neq$ ٢ $\otimes$ ١ ، وعليه فإن (ك ، $\otimes$) نظام غير إبدالي .

وبالمثل فإن $\otimes$ عملية غير تجميعية لأنه بجعل س = ١ ، ص = ٢ ، ع = ٣ نجد أن :

(س $\otimes$ ص) $\otimes$ ع = (١ $\otimes$ ٢) $\otimes$ ٣

= ٢ × (١ $\otimes$ ٢) + ٣ × ٣

= ٢ × (٢ × ١ + ٣ × ٢) + ٩

= ٢٥ (١)

س $\otimes$ (ص $\otimes$ ع) = ١ $\otimes$ (٢ $\otimes$ ٣)

= ٢ × ١ + ٣ × (٢ $\otimes$ ٣)

= ٢ + ٣ × (٢ × ٢ + ٣ × ٣)

= ٤١ (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن $\otimes$ عملية غير تجميعية ،

وبالتالي فإن (ك ، $\otimes$) نظام غير تجميعي .

تدريب (١ - ٩)

(١) ارجع إلى المثال (١ - ١٣) وأجب على الأسئلة التالية :

(أ) أحسب ٥ $\otimes$ ٧ ، ٧ $\otimes$ ٥ وقارن بين الناتجين .

(ب) أحسب (٢ $\otimes$ ١) $\otimes$ ٣ ، ٢ $\otimes$ (١ $\otimes$ ٣) وقارن بين الناتجين .

(جـ) هل ماورد في كل من (أ) ، (ب) كافٍ للبرهان على أن العملية الثنائية $\otimes$ غير إبدالية وغير تجميعية على ك ؟ ولماذا ؟

(٢) بين أن النظام (ح ، −) غير تجميعي .

(٣) هل (ح* ، ÷) نـظام تجميعي ؟ ولماذا ؟

مثال (١ – ١٤) :

إذا عرفنا عملية △ على المجموعة صہ على النحو الآتي :

لكل ٩ ، ب ∈ صہ فإن : ٩ △ ب = ٢ ٩ + ٢ ب

فابحث عمّا إذا كانت △ إبدالية ؟ تجميعية ؟

الحل :

حيث إن : ٩ △ ب = ٢ ٩ + ٢ ب = ٢ ب + ٢ ٩ = ب △ ٩ لكل ٩ ، ب ∈ صہ

إذن △ إبدالية . وحيث إنه لكل ٩ ، ب ، حـ ∈ صہ فإن

(٩ △ ب) △ حـ = ٢ (٩ △ ب) + ٢ حـ

= ٢ (٢ ٩ + ٢ ب) + ٢ حـ

= ٤ ٩ + ٤ ب + ٢ حـ (١)

٩ △ (ب △ حـ) = ٢ ٩ + ٢ (ب △ حـ)

= ٢ ٩ + ٢ (٢ ب + ٢ حـ)

= ٢ ٩ + ٤ ب + ٤ حـ (٢)

فمن (١) ، (٢) نستنتج أن △ عملية غير تجميعية ، لأن

(٩ △ ب) △ حـ ≠ ٩ △ (ب △ حـ)

تدريب (١ – ١٠)

ناقش صحة العبارة الآتية

« ليس من الضروري أن تكون العملية الإبدالية تجميعية ، والعكس صحيح ، أي أنه ليس من الضروري أن تكـون العملية التجميعية إبدالية » للإجابة على ذلك استفد من المثالين (١ – ١١) ، (١ – ١٤)

تمـــارين (١ - ٣)

(١) اذكر ما إذا كانت كل من العبارات الآتية صائبة أم لا واكتب الصواب إذا كانت خاطئة :

(أ) عملية جمع الساعات عملية ثنائية غير إبدالية .

(ب) عملية جمع الساعات عملية ثنائية تجميعية .

(حـ) عملية الضرب على مجموعة الأعداد الكلية إبدالية وغير تجميعية

(د) عملية الضرب على مجموعة الأعداد الطبيعية غير تجميعية وإبدالية

(هـ) الجمع على مجموعة الأعداد الكلية عملية إبدالية وتجميعية

(و) العملية الثنائية في المثال (١ - ١١) غير إبدالية .

(٢) أكمل الفراغ في الجدول الآتي بحيث تكون العملية الثنائية * على المجموعة { ١ ، ٢ ، ٣ } إبدالية .

*	١	٢	٣
١	١	٢	٣
٢		١	
٣			١

(٣) لتكن ⊗ عملية ثنائية معرفة على المجموعة ط على النحو الآتي

أ ⊗ ب = أ (أ + ب) .

(أ) أوجد قيمة ٣ ⊗ (٤ ⊗ ٦) ،

(٣ ⊗ ٤) ⊗ ٦ ، (٥ ⊗ ٧) ⊗ (٢ ⊗ ٤) .

(ب) هل العملية الثنائية ⊗ إبدالية ؟ تجميعية ؟ ولماذا ؟ .

(٤) إذا كانت ⊗ عملية ثنائية على المجموعة ط معرفة على النحو الآتي

$$ا ⊗ ب = ب^{ا}$$

فأجب عما يلي : -

(ا) أوجد قيمة (٥ ⊗ ٢) ⊗ ٣ ، ٥ ⊗ (٢ ⊗ ٣) ، (٧ ⊗ ٢) ⊗ (٢ ⊗ ١)
(٢ ⊗ ٧) ⊗ (١ ⊗ ٢)

(ب) هل العملية الثنائية ⊗ إبدالية ؟ تجميعية ؟ ولماذا ؟

(٥) إذا كانت ⊗ عملية ثنائية معرفة على المجموعة ص على النحو الآتي -

$$س ⊗ ص = (س - ص)^{٢}$$

فهل هذه العملية إبدالية ؟ تجميعية ؟ ولماذا ؟

١ - ٦ العنصر المحايد :

بدراسة عمليتي الجمع والضرب على المجموعة ص نجد أنه لكل ا ∈ ص يكون

ا + ٠ = ٠ + ا = ا

ا × ١ = ١ × ا = ا

ونلاحظ أنه بجمع الصفر مع العدد ا ، فإن الناتج يكون ا ، وكذلك بضرب الواحد الصحيح في العدد ا ، يكون الناتج ا . ولهذا فإن الصفر يسمى عنصراً محايداً لعملية الجمع كما يسمى الواحد عنصراً محايداً لعملية الضرب ويمكن تعميم المفهوم بالتعريف التالي : -

تعريف (١ - ٥) :

العنصر م في المجموعة س المعرّفة عليها عملية ثنائية * يسمى عنصراً محايداً بالنسبة لهذه العملية إذا كان :

ا * م = م * ا = ا ، لكل ا ∈ س

مثال (١-١٥) :

إذا اعتبرنا عملية جمع الساعات الموضحة في المثال (١ ـ ١٠) نلاحظ أنه لأي عدد أ ∈ { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ } :

أ ⊕ ١٢ = ١٢ ⊕ أ = أ

أي أن : ١٢ هو العنصر المحايد لعملية جمع الساعات .

مثال (١-١٦) :

أثبت أن عملية الطرح على المجموعة ص ليس لها عنصر محايد .

الحل :

نلاحظ أن الصفر لا يمكن أن يكون عنصراً محايداً لهذه العملية الثنائية لأن :

أ – ٠ = أ في حين أن ٠ – أ ≠ أ مالم تكن أ = صفراً

وإن وجد عنصر محايد ، م مثلا ، بالنسبة لهذه العملية الثنائية فإنه يجب أن يحقق :

أ – م = أ ، م – أ = أ ، لكل أ ∈ ص ، حسب التعريف (١ ـ ٥). من المعادلة الأولى نستنتج أن م = صفراً ، ومن المعادلة الثانية م = ٢ أ

حيث أ أي عنصر من ص ، وهذا غير ممكن .

إذن لا يوجد عنصر محايد بالنسبة لهذه العملية الثنائية .

تدريب (١ - ١١)

(١) ارجع إلى المثال (١ – ٩) وعين العنصر المحايد في ص٤ بالنسبة للعملية ⊕ مستفيداً من الجدول (١ – ٦) .

(٢) في الجدول (١ – ٥) عين العنصر المحايد في س بالنسبة للعملية *

١ – ٧ النظير :

عند دراستنا لعملية الجمع على المجموعة ص وجدنا أن لهذه العملية الثنائية عنصرا محايداً هو الصفر .

ومن المعلوم أن لكل عنصر أ ∈ صـ يوجد عنصر ب ∈ صـ بحيث :

أ + ب = صفراً .

ومن ذلك نستنتج أن ب = − أ

أي أن لكل عنصر في المجموعة صـ يوجد عنصر آخر في المجموعة صـ بحيث أن مجموع هذين العنصرين يساوي الصفر الذي هو العنصر المحايد في هذه المجموعة بالنسبة لعملية الجمع .

نسمي العنصر − أ في مثالنا هذا نظير العنصر أ

وبصورة عامة نعرِّف العنصر النظير لعنصر آخر بالنسبة لعملية ثنائية بما يأتي

تعريف (١ – ٦) :

إذا كان للعملية الثنائية * على المجموعة سـ عنصر محايد م . وإذا كان أ ∈ سـ فإن (ب ∈ سـ) يسمى نظير (أو معكوس) العنصر أ بالنسبة للعملية الثنائية * إذا كان

أ * ب = م ، ب * أ = م

عادة يرمز لنظير أ بالرمز $أ^{-1}$

مثال (١ – ١٧)

إذا أعدنا النظر في المثال (١ – ٩) فإننا نلاحظ أن الصفر هو العنصر المحايد للعملية ⊕ وأن لكل عنصر من عناصر المجموعة $صـ_٤$ نظير حيث نجد

العنصر	٠	١	٢	٣
نظيره	٠	٣	٢	١

مثال (١ – ١٨) :

إذا أعدنا النظر في المثال (١ – ٤) فإننا نلاحظ أن

(١) المجموعة الخالية ∅ هي العنصر المحايد بالنسبة لعملية الاتحاد لأنه إذا كانت

صـ مجموعة جزئية من المجموعة { أ ، ب ، حـ } فإن :

$$ص \cup \varnothing = ص \quad ، \quad \varnothing \cup ص = ص$$

(٢) إن العنصر المحايد $\varnothing$ هو العنصر الوحيد الذي له نظير إذا فرضنا أن $ص_١ \in س$ هو نظير العنصر $ص_٢$ ، نحصل على :

$$ص_١ \cup ص_٢ = \varnothing \quad ، \quad ص_٢ \cup ص_١ = \varnothing$$ ومن هذا نستنتج أن :

$$ص_١ = ص_٢ = \varnothing$$

مثال (١-١٩) :

(١) المجموعة س = { أ ، ب ، حـ } هي العنصر المحايد بالنسبة لعملية التقاطع على مجموعة المجموعات الجزئية للمجموعة س لأنه لأي مجموعة جزئية $ص \subset س$ يتحقق :

$$ص \cap \{أ ، ب ، حـ\} = ص ،$$

$$\{أ ، ب ، حـ\} \cap ص = ص$$

(٢) العنصر المحايد { أ ، ب ، حـ } هو العنصر الوحيد الذي له نظير .

إذا فرضنا أن $ص_١ \subset س$ هو نظير للعنصر $ص_٢$ ، فإننا نحصل على :

$$ص_١ \cap ص_٢ = \{أ ، ب ، حـ\} .$$

$$ص_٢ \cap ص_١ = \{أ ، ب ، حـ\} .$$

بما أن $ص_١$ ، $ص_٢$ مجموعتان جزئيتان من المجموعة { أ ، ب ، حـ } .

فإن : $ص_١ = ص_٢ = \{أ ، ب ، حـ\}$.

مثال (١-٢٠) :

إذا كانت $\otimes$ عملية ثنائية معرفة كما يلي :

$$أ \otimes ب = \frac{أ ب}{٢} \quad ، \quad \text{لكل } أ ، ب \in ح^*$$

فادرس خواص العملية $\otimes$ من حيث :

(١) كونها إبدالية أم لا ، تجميعية أم لا .

(٢) وجود عنصر محايد في ح* .

(٣) وجود نظير لكل عنصر في ح*.

الحل :

(١) أ $\otimes$ ب $= \frac{١}{٢}$ أ . ب وحيث إن عملية الضرب في ح* إبدالية فإن :

$$\text{أ} \otimes \text{ب} = \frac{١}{٢}\,\text{أ} \cdot \text{ب} = \frac{١}{٢}\,\text{ب} \cdot \text{أ} = \text{ب} \otimes \text{أ}$$ ، لكل أ ، ب $\in$ ح*

أي أن $\otimes$ إبدالية .

$$(\text{أ} \otimes \text{ب}) \otimes \text{جـ} = (\frac{١}{٢}\,\text{أ ب}) \otimes \text{جـ} = \frac{١}{٢}(\frac{١}{٢}\,\text{أ ب})\,\text{جـ} = \frac{١}{٤}\,\text{أ ب جـ} \quad (١)$$

$$\text{أ} \otimes (\text{ب} \otimes \text{جـ}) = \text{أ} \otimes (\frac{١}{٢}\,\text{ب جـ}) = \frac{١}{٢}(\text{أ} \times \frac{١}{٢}\,\text{ب جـ})$$

$$= \frac{١}{٤}\,\text{أ ب جـ} \quad (٢)$$

من (١) ، (٢) ينتج أن :

$$(\text{أ} \otimes \text{ب}) \otimes \text{جـ} = \text{أ} \otimes (\text{ب} \otimes \text{جـ})$$ ، لكل أ ، ب ، جـ $\in$ ح*

أي أن $\otimes$ تجميعية .

(٢) لو فرضنا أن م $\in$ ح* عنصر محايد فإن :

$$\text{أ} \otimes \text{م} = \text{م} \otimes \text{أ} = \text{أ}$$ لكل أ $\in$ ح*

وحيث إن $\otimes$ إبدالية فإن المساواة الأولى محققة ، ونكتفي بكتابة

أ $\otimes$ م = أ أو م $\otimes$ أ = أ ونبحث عن م بحل إحدى هاتين المعادلتين ،

ولنأخذ الأولى مثلاً ، التي تكتب بالصورة :

$$\frac{١}{٢}\,\text{أ} \cdot \text{م} = \text{أ} \Longleftarrow \text{م} = ٢$$

فالعنصر المحايد هو العدد ٢ .

(ولعلك تلاحظ أنه لكل أ $\in$ ح* يكون : $\frac{١}{٢}\,\text{أ} \times ٢ = \frac{١}{٢} \times ٢ \times \text{أ} = \text{أ}$)

(٣) العناصر المتناظرة :

إذا كان $أ^{-1} \in ح^*$ نظيراً للعنصر $أ \in ح^*$ فإن :

$$أ \otimes أ^{-1} = أ^{-1} \otimes أ = ٢$$

والمساواة الأولى محققة ، لأن $\otimes$ إبدالية . لذا نكتفي بحل إحدى المعادلتين :

$$أ \otimes أ^{-1} = ٢ \quad \text{أو} \quad أ^{-1} \otimes أ = ٢$$

لكي نحصل على قيمة $أ^{-1}$ ، ولنأخذ المعادلة الأولى مثلاً والتي تكتب بالصورة :

$$\frac{١}{٢} أ \, أ^{-1} = ٢ \Leftarrow أ \, أ^{-1} = ٤ \quad \text{ومنه} \quad أ^{-1} = \frac{٤}{أ}$$

إذن : فلكل عدد حقيقي $أ \in ح^*$ نظير بالنسبة للعملية $\otimes$ هو $\frac{٤}{أ}$

تدريب (١ - ١٢)

(١) في المثال (١ - ٢٠) أوجد :

(أ) نظير كل من $\frac{١}{٢}$ ، $\sqrt{٢}$ ، -٣

(ب) $(-٣ \otimes ٥) \otimes ٨$ ، $-٣ \otimes (٥ \otimes ٨)$ وقارن الناتجين .

(٢) أعد حل المثال (١ - ٢٠) بعد وضع $ن^*$ مكان $ح^*$.

(٣) في الجداول (١ - ١) ، (١ - ٢) ، (١ - ٤) ، (١ - ٥) أوجد في كل مرة العنصر المحايد - إن وجد - ثم ابحث عن العناصر المتناظرة في حالة وجودها .

(٤) إذا كان $أ^{-1}$ هو نظير أ في النظام (س ، *) فبين أن $أ^{-1} \neq \frac{١}{أ}$ بالضرورة ؟

تمارين (١ - ٤)

(١) اذا اعتبرنا س = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } وعرّفنا العملية الثنائية $\oplus$ على المجموعة س على النحو الآتي : أ $\oplus$ ب = باقي قسمة أ + ب على ٥

فأجب عما يأتي : -

(أ) أوجد العنصر المحايد للعملية الثنائية $\oplus$

(ب) أوجد نظير كل عنصر من عناصر صہ$_{ع}$ بالنسبة للعملية $\oplus$.

(حـ) حل المعادلات الآتية :

(١) ٢ $\oplus$ س = ١   (٢) ٣$^{-١}$ $\oplus$ س = ١

(٣) ٤$^{-١}$ $\oplus$ س = ٠   (٤) ٢$^{-١}$ $\oplus$ س = ٣

(٢) اذا اعتبرنا صہ$_{ع}$ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } وعرفنا العملية الثنائية $\odot$ عليها على النحو الآتي :

أ $\odot$ ب = باقي قسمة أ ب على ٤

فأجب عن الآتي :

(أ) مثل هذه العملية في جدول .

(ب) أوجد العنصر المحايد بالنسبة لهذه العملية .

(حـ) أوجد نظير كل عنصر إن وجد بالنسبة لهذه العملية

(د) أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية :

(١) ٢ $\odot$ س = ٠   (٢) ٣$^{-١}$ $\odot$ س = ٢

(٣) في المثال (١ - ١١) أوجد العنصر المحايد ومعكوس كل تطبيق من التطبيقات

د$_{١}$ ، د$_{٢}$ ، د$_{٣}$ ، ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$ ، ل$_{٣}$.

(٤) أوجد عملية على مجموعة سہ لها عنصر محايد ولا يوجد لأي عنصر من المجموعة سہ ، باستثناء العنصر المحايد ، نظير .

(٥) (أ) أوجد العنصر المحايد بالنسبة للعملية ∗ المعرفة على مجموعة الأعداد الكلية ك كما يلي

أ ∗ ب = أ + ب + أ ب

(ب) إذا كانت العملية الثنائية السابقة معرَّفة على المجموعة ط فهل يوجد لها عنصر محايد ؟

(٦) أثبت أن العنصر المحايد م للعملية الثنائية على مجموعة ما هو نظير نفسه .

١ – ٨ الزمرة وخواصها :

رأينا في البنود السابقة أن بعض الأنظمة قد تكون له خاصةٌ معيَّنة أو أكثر (مثل خاصّة : الانغلاق والإبدال والتجميع ووجود العنصر المحايد ووجود نظير لكل عنصر) . ويكتسب النظام أهمية بحسب ما يحققه من خواص ، ولعلَّ من أشهر هذه الأنظمة وأهمها ما يسمى « الزمرة » التي كان لها دور بارز في كشف أسرار جنور كثيرات الحدود في أوائل القرن التاسع عشر الميلادي ، بعد أن يئس علماء الرياضيات من إيجاد قانون عام لحل معادلة الدرجة الخامسة أسوة بقوانين المعادلات من الدرجة الثانية إلى الرابعة . كما أن للزمرة دوراً بارزاً في صياغة قوانين الفيزياء الحديثة .

لنأخذ النظام (صه ، +) فنجد أن :

(١) عملية الجمع + على مجموعة الأعداد الصحيحة صه ، عملية ثنائية ، لأنه لكل أ ، ب ∈ صه فإن أ + ب ∈ صه .

(٢) كما أن + تحقِّق خاصة التجميع ، لأنه لكل أ ، ب ، حـ ∈ صه فإن : (أ + ب) + حـ = أ + (ب + حـ)

(٣) يوجد عنصر محايد في صه بالنسبة للعملية + هو الصفر ، لأنه . لكل أ ∈ صه فإن :
أ + ٠ = ٠ + أ = أ .

(٤) وكذلك يوجد نظير (معكوس) في صه لكل أ ∈ صه حيث نجد
أ$^{-1}$ = − أ ، لأن أ + (− أ) = (− أ) + أ = ٠

نسمي النظام (صه ، +) زمـرة لتحقيقه للشـروط الأربعة السابقة . هذا ويمكن أن نصف النظام (صه ، +) بقولنا إنه نظام مغلق وتجميعي وبه عنصر محايد ولكل عنصر فيه نظير .

تعريف (١ – ٧) :

نقول إن النظام (سه ، *) زمرة (أو اختصاراً إن سه زمرة) إذا كان مغلقاً وتجميعياً وبه عنصر محايد ولكل عنصر فيه نظير .

وإذا كان (سه ، *) نظاماً إبدالياً بالإضافة إلى كونه زمرة قيل إن سه زمرة إبدالية .

إن (صـ ، +) زمرة إبدالية ، لأن العملية + إبدالية ، كما نعلم .

أما النظام (صـ ، ⋅) فليس زمرة لأنه ، بالرغم من كونه مغلقاً وتجميعياً وبه عنصر محايد هو العدد ١ ، إلا أن النظير بالنسبة لعملية الضرب « ⋅ » غير موجود في صـ (باستثناء العددين + ١ ، − ١) . فنظير العدد ٢ ، مثلاً يحقق المعادلة :

$$٢ \text{ س} = ١$$

وهذه المعادلة لا تتحقق لأي عدد س ∈ صـ .

مثال (١-٢١) :

ادرس الأنظمة الآتية من حيث كونها زمرة إبدالية أم لا :

(١) (صـ* ، ⋅) (٢) (صـ* ، +) (٣) (ن ، ⋅) (٤) (ن* ، ⋅)

(٥) (ح ، +) (٦) (ح ، −) .

الحل :

باستخدام التعريف (١ − ٧) نجد أن :

(١) النظام (صـ* ، ⋅) مغلق وتجميعي وإبدالي وبه عنصر محايد هو ١ ولكن لايوجد فيه نظير لكل عنصر س ∈ صـ* ، فمثلاً ، نظير ٣ هو $\frac{١}{٣}$ (لأن ٣ × $\frac{١}{٣}$ = ١) ولكن $\frac{١}{٣}$ ∉ صـ*

إذن (صـ* ، ⋅) ليس زمرة .

(٢) النظام (صـ* ، +) ليس مغلقاً ، فمثلاً ، ٢ + (− ٢) = ⋅ ، ولكن ⋅ ∉ صـ* لأن صـ* = صـ − {⋅} . إذن (صـ* ، +) ليس زمرة .

(٣) النظام (ن ، ⋅) ليس زمرة ، لأن الصفر ليس له نظير بالنسبة لعملية الضرب « ⋅ »

(٤) النظام (ن* ، ⋅) مغلق وتجميعي وإبدالي وبه عنصر محايد هو ١ ولكل عنصر P ∈ ن* نظير ضربي هو $P^{-1} = \frac{١}{P}$ ، لأن $P \times \frac{١}{P} = ١$ ، إذن (ن* ، ⋅) زمرة إبدالية .

(٥) النظام (ح ، +) مغلق وتجميعي وإبدالي وبه عنصر محايد هو الصفر ولكل عنصر ٩ ∈ ح

نظير جمعي هو $٩^{-١}$ = −٩ ، لأن ٩ + (−٩) = ٠ ، إذن (ح ، +) زمرة إبدالية .

(٦) النظام (ح ، −) ليس زمرة ، فضلاً عن أن يكون زمرة إبدالية ، لكونه لا يحقق إلا خاصة الانغلاق فقط من التعريف (١ − ٧) . فمثلاً : خاصة التجميع غير محققة لأن :

(٢ − ٣) − ٤ = −٥ ≠ ٢ − (٣ − ٤) = ٣

مثال (١-٢٢)

بالرجوع إلى المثالين (١ − ٩) ، (١ − ١٠) نجد أن كلاً من النظامين

(ص٤ ، ⊕) ، (سـه ، ⊞) زمرة إبدالية لأن

النظام (ص٤ ، ⊕) مغلق وإبدالي وبه عنصر محايد هو الصفر ، كما يتضح ذلك من الجدول (١ − ٦) الممثل للعملية ⊕ ، ولكل عنصر فيه نظير حيث نجد

العنصر	٠	١	٢	٣
نظيره	٠	٣	٢	١

وأخيراً العملية ⊕ تجميعية لأنه لكل ٩ ، ب ، حـ ∈ ص٤ فإن

(٩ ⊕ ب) ⊕ حـ = ٩ ⊕ (ب ⊕ حـ) لأن :

باقي قسمة (٩ + ب) + حـ على ٤ يساوي باقي قسمة ٩ + (ب + حـ) على ٤

وبالمثل فإن النظام (سـه ، ⊞) مغلق ، حيث سـه = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ، ١٢ }

والعملية ⊞ هي عملية جمع الساعات ، كما أن ⊞ عملية تجميعية لأنه

لكل ٩ ، ب ، حـ ∈ سـه فإن (٩ ⊞ ب) ⊞ حـ = ٩ ⊞ (ب ⊞ حـ) ، لأن

باقي قسمة (٩ + ب) + حـ على العدد ١٢ يساوي باقي قسمة ٩ + (ب + حـ) على ١٢

كذلك ⊞ عملية إبدالية ، لأن ٩ ⊞ ب = ب ⊞ ٩ لكل ٩ ، ب ∈ سـه

إذ أن باقي قسمة ٩ + ب على ١٢ يساوي باقي قسمة ب + ٩ على ١٢ العنصر المحايد بالنسبة

للعملية ⊞ هو العدد ١٢ ∈ سہ ، أي أن العدد ١٢ هنا يلعب دور الصفر في صہ .

وأخيراً لكل ؟ ∈ سہ نظير $؟^{-1}$ ∈ سہ حيث نجد :

العنصر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
نظيره	١١	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	١٢

نظرية (١ – ١) :

إذا كان (سہ ، ∗) نظاماً مغلقاً وكان به عنصر محايد فإن هذا العنصر المحايد وحيد .

البرهان :

لنفرض أن م ، مَ عنصران محايدان في سہ بالنسبة للعملية ∗ فيكون لدينا :

م ∗ مَ = مَ لأن م عنصر محايد . . . . (١)

م ∗ مَ = م لأن مَ عنصر محايد . . . . (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن مَ = م وهذا يعني أن العنصر المحايد وحيد .

نظرية (١ – ٢) :

إذا كان النظام (سہ ، ∗) زمرة فإن لكل س ∈ سہ نظير وحيد .

البرهان :

لنفرض أن سَ ، سً ∈ سہ هما نظيرا س بالنسبة للعملية ∗ فيكون لدينا :

سَ = سَ ∗ م ، حيث م العنصر المحايد في سہ

= سَ ∗ (س ∗ سً) تعريف النظير

= (سَ ∗ س) ∗ سً خاصة التجميع

= م ∗ سً لماذا ؟

= سً لماذا ؟

إذن نظير س وحيد حيث وجدنا سَ = سً .

مثال (١ - ٢٣) :

إذا كان النظام (سـ ، ∗) زمرة فاثبت أن للمعادلة :

أ ∗ س = ب ، حيث أ ، ب ∈ سـ حلاً وحيداً هو :

س = أ$^{-1}$ ∗ ب .

الحل :

لابد لنا من إثبات أمرين أولهما هو أن أ$^{-1}$ ∗ ب حل للمعادلة وثانيهما أن هذا الحل وحيد .

إن أ$^{-1}$ ∗ ب حل للمعادلة أ ∗ س = ب لأنه يحققها حيث نجد :

أ ∗ (أ$^{-1}$ ∗ ب) = (أ ∗ أ$^{-1}$) ∗ ب خاصة التجميع

= م ∗ ب خاصة النظير

= ب **خاصة المحايد**

ثانياً :

بفرض ص ∈ سـ حلاً آخر للمعادلة فيجب أن تحقِّق ص المعادلة فيكون .

أ ∗ ص = ب ⟸ أ$^{-1}$ ∗ (أ ∗ ص) = أ$^{-1}$ ∗ ب

⟸ (أ$^{-1}$ ∗ أ) ∗ ص = س

⟸ م ∗ ص = س

⟸ ص = س

نظـرية (١ - ٣) :

إن عملية تحصيل التطبيقات عملية تجميعية .

البرهان :

لنفرض أن د$_1$ ، د$_2$ ، د$_3$ هي التطبيقات الآتية :

د$_1$: سـ ⟵ شـ، د$_2$: شـ ⟵ ع ، د$_3$: ع ⟵ هـ

فيكون :

(د$_3$ ∘ د$_2$) ∘ د$_1$ (س) = (د$_3$ ∘ د$_2$) (د$_1$ (س)) ، حيث س ∈ سـ

= د$_3$ (د$_2$ (د$_1$ (س))) ...... (١)

د$_3$ ∘ (د$_2$ ∘ د$_1$) (س) = د$_3$ ((د$_2$ ∘ د$_1$) (س))

= د$_3$ (د$_2$ (د$_1$ (س))) ...... (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن :

(د$_3$ ∘ د$_2$) ∘ د$_1$ (س) = (د$_3$ ∘ (د$_2$ ∘ د$_1$)) (س) ، لكل س ∈ سـ

لاحظ أن س ∈ سـ ، د$_1$ (س) ∈ شـ ، د$_2$ (د$_1$ (س)) ∈ ع ،

د$_3$ (د$_2$ (د$_1$ (س))) ∈ ص ، وهذا يعني أن التطبيقين :

(د$_3$ ∘ د$_2$) ∘ د$_1$ ، د$_3$ ∘ (د$_2$ ∘ د$_1$) لهما المجال نفسه سـ والمجال المقابل نفسه أيضا ص . مما تقدم نستنتج أن التطبيقين :

(د$_3$ ∘ د$_2$) ∘ د$_1$ ، د$_3$ ∘ (د$_2$ ∘ د$_1$) متساويان ، أي أن عملية تحصيل التطبيقات « ∘ » هي عملية تجميعية .

مثال (١-٢٤) :

ارجع إلى المثال (١ – ١١) وأثبت أن النظام (سـ ، ∘) زمرة غير إبدالية .

الحل :

إن الجدول (١ – ٧) يمثل العملية « ∘ » ومنه نستنتج أن .

(١) (سـ ، ∘) نظام مغلق ، لأنه لكل س ، ص ∈ سـ فإن س ∘ ص ∈ سـ .

(٢) (سـ ، ∘) نظام غير إبدالي ، فمثلاً : د$_2$ ∘ ل$_2$ = ل$_3$ ≠ ل$_1$ = ل$_2$ ∘ د$_2$

(٣) $د_١ \in$ سـ هو العنصر المحايد للنظام (سـ ، ه) ، لأنه لكل س $\in$ سـ

فإن : $د_١$ ه س = س ه $د_١$ = س .

(٤) لكل س $\in$ سـ نظير $س^{-١}$ $\in$ سـ ، حيث نجد :

س	$د_١$	$د_٢$	$د_٣$	$ل_١$	$ل_٢$	$ل_٣$
$س^{-١}$	$د_١$	$د_٣$	$د_٢$	$ل_١$	$ل_٢$	$ل_٣$

(٥) (سـ ، ه) نظام تجميعي ، لأن عملية تحصيل التطبيقات « ه » تجميعية ، حسب النظرية (١ - ٣) .

مما تقدم نجد أن (سـ ، ه) زمرة غير إبدالية .

نظرية (١ - ٤) :

إذا كانت أ ، ب ، حـ عناصر في الزمرة (سـ ، *) فإنْ :

(١) أ * ب = أ * حـ $\Longleftrightarrow$ ب = حـ (قاعدة الحذف من اليمين)

(٢) ب * أ = حـ * أ $\Longleftrightarrow$ ب = حـ (قاعدة الحذف من اليسار)

البرهـــان

(١) أ $\in$ سـ $\Longleftrightarrow$ $أ^{-١}$ $\in$ سـ وبالتالي فإن :

أ * ب = أ * حـ $\Longleftrightarrow$ $أ^{-١}$ * (أ * ب) = $أ^{-١}$ * (أ * حـ) ، لماذا ؟

$\Longleftrightarrow$ ($أ^{-١}$ * أ) * ب = ($أ^{-١}$ * أ) * حـ خاصة التجميع

$\Longleftrightarrow$ م * ب = م * حـ خاصة النظير

$\Longleftrightarrow$ ب = حـ خاصة المحايد

(٢) يترك برهانه للطالب كتدريب .

تدريب (١ - ١٣)

(أ) أثبت صحة الفقرة (٢) من النظرية (١ - ٤) .

(ب) أوجد حل المعادلات الآتية في الزمرة (سـ ، ه) الواردة في المثال (١ - ٢٤)

(١) $ل_١$ ه س = $د_٢$ (٢) س ه $ل_١$ = $ل_٢$ (٣) $د_٢^{-١}$ ه س = $ل_٣$

تمارين (١ - ٥)

في التمارين (١) إلى (١٠) عيِّن الأنظمة التي تكون زمرة ، واذكر سبباً واحداً فقط عندما لا يكون النظام زمرة :

(١) ({ ١ ، - ١ } ، +)

(٢) ({ ١ ، - ١ } ، ·)

(٣) (سـ ، +) ، حيث سـ مجموعة الأعداد الزوجية .

(٤) (سـ ، ∩) ، حيث سـ مجموعة أجزاء المجموعة { أ ، ب ، حـ }

(٥) ({ · } ، +)

(٦) ($صـ_٦^*$ ، ⊙) ، حيث $صـ_٦^*$ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، والعملية ⊙ معرّفة كما يلي :

أ ⊙ ب = باقي قسمة أ ب على ٦ لكل أ ، ب ∈ $صـ_٦^*$.

(٧) (سـ ، ⊙) ، حيث سـ = { ١ ، ٣ ، ٧ ، ٩ } ، ⊙ معرّفة على سـ كما يلي

أ ⊙ ب = باقي قسمة أ ب على ١٠ لكل أ ، ب ∈ سـ .

(٨) (سـ ، ⊕) ، حيث سـ = { ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } ، ⊕ معرّفة عليها كما يلي

أ ⊕ ب = باقي قسمة أ + ب على ١٠ لكل أ ، ب ∈ سـ .

(٩) (سـ ، ∗) حيث سـ = { $٢^ن$: ن ∈ صـ } ، ∗ معرّفة عليها كما يلي

أ ∗ ب = أ ب لكل أ ، ب ∈ سـ

(١٠) (سـ ، ∪) ، حيث سـ مجموعة أجزاء المجموعة { أ ، ب ، حـ } .

(١١) أثبت أن كلاً من النظامين (ن ، +) ، ($ح^*$ ، ·) زمرة إبدالية .

(١٢) ناقش ما إذا كان كل من النظامين (ن ، -) ، ($ح^*$ ، +) زمرة أم لا .

(١٣) إذا كان (سـ ، ∗) زمرة فأثبت أن لكل معادلة :

س ∗ أ = ب ، حيث أ ، ب ∈ سـ حل وحيد في سـ هو :

س = ب ∗ $أ^{-١}$

١ – ٩ الزمر الدائرية :

لتكن $ص_ن$ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . . . . ، ن – ١ } ، حيث ن عدد صحيح موجب ،

تسمى $ص_ن$ مجموعة الأعداد الصحيحة مقياس ن

أولاً : لنعرف عملية جمع ، نرمز لها بالرمز ⊕ ، على المجموعة $ص_ن$ كما يلي :

P ⊕ ب = باقي قسمة P + ب على ن لكل P ، ب ∈ $ص_ن$

نظرية (١ – ٥) :

إن النظام ($ص_ن$ ، ⊕) زمرة إبدالية .

البرهــان

(١) ($ص_ن$ ، ⊕) نظام مغلق ، لأنه لكل P ، ب ∈ $ص_ن$ فإن باقي قسمة P + ب على ن هو أحد الأعداد : ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . . ، ن – ١ وهذا يعني أن P ⊕ ب ∈ $ص_ن$

(٢) ($ص_ن$ ، ⊕) نظام تجميعي لأنه لكل P ، ب ، حـ ∈ $ص_ن$ فإن :

باقي قسمة (P + ب) + حـ على ن يساوي باقي قسمة P + (ب + حـ) على ن وهذا يعني أن : (P ⊕ ب) ⊕ حـ = P ⊕ (ب ⊕ حـ) .

(٣) ($ص_ن$ ، ⊕) نظام إبدالي لأنه لكل P ، ب ∈ $ص_ن$ فإن :

باقي قسمة P + ب على ن يساوي باقي قسمة ب + P على ن ، وهـذا يعـني أن :

P ⊕ ب = ب ⊕ P .

(٤) ($ص_ن$ ، ⊕) به عنصر محايد جمعي هو الصفر لأنه : لكل P ∈ $ص_ن$ فإن : باقي قسمة (P + ٠) على ن يساوي باقي قسمة P على ن أي أن : P ⊕ ٠ = P (لاحـظ أن ٠ ⊕ P = P لأن ⊕ إبداليـة .)

(٥) لكل P ∈ $ص_ن$ نظير جمعي بالنسبة للعملية ⊕ هو P^{-1} = ن – P لأن :

P ⊕ P^{-1} = باقي قسمة (P + (ن – P)) على ن

= باقي قسمة ن على ن

= ٠ (لا تنس أن P^{-1} ⊕ P = P ⊕ P^{-1}) (لماذا ؟) .

ثانياً : لنعرف عملية ضرب ، نرمزلها بالرمز $\odot$ ، على المجموعة صـ$_ن$ كما يلي :

أ $\odot$ ب = باقي قسمة أ . ب على ن لكل أ ، ب $\in$ صـ$_ن$.

نظرية (١ – ٦) :

إن النظام (صـ$_ن$ ، $\odot$) مغلق وتجميعي وإبدالي وبه عنصر محايد ضربي هو العدد ١ عندما ن $\geqslant$ ٢ .

البرهـان

برهان هذه النظرية يشبه تماماً برهان النظرية (١ – ٥) . لذا يترك كتمرين للطالب .

مثال (١-٢٥)

(١) في الزمرة (صـ$_{١١}$ ، $\oplus$) عين (أ) المحايد الجمعي (ب) نظير كل عنصر .

(٢) في النظام (صـ$_٨$ ، $\odot$) عين (أ) المحايد الضربي (ب) أثبت أنه لايوجد نظير ضربي للعنصر ٢ $\in$ صـ$_٨$ ، بينما يوجد نظير ضربي للعنصر ٣ $\in$ صـ$_٨$

الحل :

(١) (أ) المحـايد الجمعي في النظام (صـ$_{١١}$ ، $\oplus$) هو الصفر ، حسب النظرية (١ – ٥)

(ب)

العنصر	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
نظيره	٠	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١

(٢) (أ) المحايد الضربي هو العدد ١ ، حسب النظرية (١ – ٦)

(ب) لنفرض أن النظير الضربي للعنصر ٢ هو س فيكون :

٢ $\odot$ ٢$^{-١}$ = ٢ $\odot$ س = ١ تعريف النظير

وبجعل س تأخذ القيم : ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، على الترتيب نجد أنه في كل حالة ٢ $\odot$ س $\neq$ ١ ، فمثلاً ٢ $\odot$ ٠ = ٠ ،

٢ $\odot$ ١ = ٢ ، ٢ $\odot$ ٣ = ٦ ، ٢ $\odot$ ٤ = ٠ .

إذن لا يوجد حل للمعادلة ٢ $\odot$ س = ١ في $صه_٨$ وبالتالي فإنه لايوجد نظير ضربي للعنصر ٢ .

بفرض أن النظير الضربي للعنصر ٣ هو س يكون :

٣ $\odot$ $٣^{-١}$ = ٣ $\odot$ س = ١   تعريف النظير

وبحل هذه المعادلة في $صه_٨$ نجد أن س = ٣ تحقق المعادلة لأن ٣ $\odot$ ٣ = باقي قسمة ٣ × ٣ على ٨ = ١ وهذا يعني أن $٣^{-١}$ = ٣

تدريب (١ – ٤٤)

(١) نقول عن عددين صحيحين ﺃ ، ب إنهما أوليان فيما بينهما إذا كان القاسم المشترك الأكبر لهما هو العدد ١، ونعبر عن ذلك بالصورة (ﺃ ، ب) = ١. في النظام ($صه_٨$، $\odot$) عيّن الأعداد الأولية بالنسبة للعدد ٨ ، وتأكد أنه عندما يكون (ﺃ ، ٨) = ١ فإن ﺃ $\in$ $صه_٨$ له نظير ضربي ، وعندما يكون (ﺃ ، ٨) $\neq$ ١ فإن ﺃ ليس له نظير ضربي في $صه_٨$.

(٢) تأكد أن (سه ، $\odot$) زمرة ، حيث سه = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ } $\subset$ $صه_٨$

تعريف (١ – ٨) :

إذا كان (سه ، *) زمرة وكان س $\in$ سه ، ن عدد طبيعي فإننا نعرّف القوى الصحيحة بالنسبة للعملية * لكل من س ، $س^{-١}$ كما يلي :

(١) $س^{ن}$ = س * س * س * . . . * س (س مكررة ن من المرات)

(٢) $س^{-ن}$ = $(س^{-١})^{ن}$ = $س^{-١}$ * $س^{-١}$ * . . . * $س^{-١}$ ($س^{-١}$ مكررة ن من المرات)

(٣) $س^{٠}$ = م ، حيث م العنصر المحايد في الزمرة سه .

مثال (١ – ٢٦) :

(١) تحقق من أن النظام ($صه^{*}_{٥}$ ، $\odot$) زمرة إبدالية

(٢) احسب : (ﺃ) $٢^{٤}$ (ب) $٣^{٢}$ (حـ) $٤^{٢}$

(د) $٣^{٠}$ (هـ) $٢^{-٤}$

الحل :

(١) إن الجدول (١ – ٨) يمثل عملية الضرب ⊙ ومنه يتبين أن النظام (صه* ، ⊙) مغلق وعنصره المحايد ١ ، ولكل عنصر فيه نظير حيث نجد:

العنصر	١	٢	٣	٤
نظيره	١	٣	٢	٤

أما خاصة التجميع فمحققة ، حسب النظرية (١ – ٦) وأخيراً خاصة الإبدال محققة ، حسب النظرية (١ – ٦) كما يمكن التحقق من خاصة الإبدال من ملاحظة تماثل العناصر حول قطر الجدول (١ – ٨) .

⊙	١	٢	٣	٤
١	١	٢	٣	٤
٢	٢	٤	١	٣
٣	٣	١	٤	٢
٤	٤	٣	٢	١

جـــدول (١ – ٨)

إذن (صه* ، ⊙) زمرة إبدالية .

(٢) (أ) $٢^{٤}$ = ٢ ⊙ ٢ ⊙ ٢ ⊙ ٢ تعريف (١ – ٨)

= (٢ ⊙ ٢) ⊙ (٢ ⊙ ٢) خاصة التجميع

= ٤ ⊙ ٤ تعريف ⊙ أو من الجدول (١ – ٨)

= ١ لماذا ؟

وبالمثل : (ب) $٣^{٣}$ = ٣ ⊙ ٣ ⊙ ٣

= (٣ ⊙ ٣) ⊙ ٣ = ٤ ⊙ ٣ = ٢

(حـ) $٤^{٣}$ = ٤ ⊙ ٤ ⊙ ٤ = (٤ ⊙ ٤) ⊙ ٤ = ١ ⊙ ٤ = ٤

(د) $٣^{٠}$ = ١ تعريف (١ – ٨)

(هـ) $٢^{-٤}$ = $٢^{-١}$ ⊙ $٢^{-١}$ ⊙ $٢^{-١}$ ⊙ $٢^{-١}$ تعريف (١ – ٨)

= ٣ ⊙ ٣ ⊙ ٣ ⊙ ٣ لأن $٢^{-١}$ = ٣

= ٤ ⊙ ٤ لأن ٣ ⊙ ٣ = ٤

= ١

تعريف (١ – ٩) :

نقول إن الزمرة (سـ ، *) منتهية إذا كانت سـ مجموعة منتهية ، أما إذا كانت سـ مجموعة غير منتهية فنقول إن (سـ ، *) زمرة غير منتهية .

وعندما تكون سـ زمرة منتهية فإننا نرمز لعدد عناصرها بالرمز |سـ| ونسميه رتبة الزمرة .

وحيث إن أي زمرة منتهية (سـ ، *) هي مجموعة غير خالية لوجود العنصر المحايد فيها فإن رتبتها = |سـ| ≮ ١ . فمثلاً :

رتبة الزمرة (صـن ، ⊕) = |صـن| = ن ،

رتبة الزمرة (صـه* ، ⊙) = |صـه*| = ٤ ، لاحظ أن صـه* = صـه – { ٠ }

رتبة الزمرة (سـ ، ٥) الواردة في المثال (١ – ٢٤) = |سـ| = ٦

وبالرجوع إلى المثال (١ – ٢٦) نلاحظ أن الزمرة (صـه* ، ⊙) يمكن الحصول على جميع عناصرها من قوى العنصر ٢ وذلك على النحو الآتي :

$٢^١ = ٢ ، ٢^٢ = ٢ ⊙ ٢ = ٤ ، ٢^٣ = ٢^٢ ⊙ ٢ = ٤ ⊙ ٢ = ٣ ،$

$٢^٤ = ٢^٣ ⊙ ٢ = ٣ ⊙ ٢ = ١$

من الواضح أن : { $٢^١$ ، $٢^٢$ ، $٢^٣$ ، $٢^٤$ } = { ٢ ، ٤ ، ٣ ، ١ } = صـه*

نقول في هذه الحالة إن العنصر ٢ مولّد للزمرة صـه* (أو ٢ يولّد الزمرة صـه*)

ونستخدم الرمز ‹ ٢ › للدلالة على المجموعة التي تولدها قوى العدد ٢ ، أي أن :

‹ ٢ › = { ٢ ، $٢^٢$ ، $٢^٣$ ، $٢^٤$ } = { ٢ ، ٤ ، ٣ ، ١ } = صـه* .

لاحظ أن القوى الأخرى للعدد ٢ لا ينشأ عنها عناصر جديدة في صـه* فمثلاً :

$٢^٦ = ٢^٤ ⊙ ٢^٢ = ١ ⊙ ٤ = ٤$.

لنأخذ ٤ ∈ صـه* ونحسب ‹ ٤ › فنجد .

‹ ٤ › = { ٤ ، $٤^٢$ ، $٤^٣$ ، $٤^٤$ } = { ٤ ، ١ ، ٤ ، ١ }

= { ١ ، ٤ } ≠ صـه* .

إذن العنصر ٤ لايولّد الزمرة $ص_٦$.

وبصفة عامة إذا كانت (سـ ، *) زمرة رتبتها ن وكان س ∋ سـ فإن :

〈 س 〉 = { س ، $س^٢$ ، $س^٣$ ، . . . ، $س^ر$ = م } ، حيث م المحايد في سـ ، ر ≥ ن . وفي الحالة التي يكون فيها 〈 س 〉 = سـ نقول إن س مولّد للزمرة سـ .

تعريف (١ – ١٠) :

نقول إن الزمرة (سـ ، *) دائرية إذا وُجد بها عنصر واحد على الأقل يولّدها (أي إذا وجد بها عنصر س ∋ سـ بحيث 〈 س 〉 = سـ) .

مثال (١-٢٧) :

أثبت أن ($ص_٦$ ، ⊕) زمرة دائرية وعين جميع مولّداتها .

الحل :

إن ($ص_٦$ ، ⊕) زمرة إبدالية ، حسب النظرية (١ – ٥) . لذا يبقى إثبات أن $ص_٦$ زمرة دائرية .

نعلم أن $ص_٦$ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } .

إن : 〈 ٠ 〉 = { ٠ } ≠ $ص_٦$ ،

〈 ١ 〉 = { ١ ، $١^٢$ ، $١^٣$ ، $١^٤$ ، $١^٥$ ، $١^٦$ }

= { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٠ } (تذكر أن $١^٣$ = ١ ⊕ ١ ⊕ ١ = ٣)

= $ص_٦$

إذن العنصر ١ يولّد الزمرة $ص_٦$ وبالتالي فإن $ص_٦$ زمرة دائرية .

〈 ٢ 〉 = { ٢ ، $٢^٢$ ، $٢^٣$ } = { ٢ ، ٤ ، ٠ } ≠ $ص_٦$.

〈 ٣ 〉 = { ٣ ، $٣^٢$ } = { ٣ ، ٠ } ≠ $ص_٦$

〈 ٤ 〉 = { ٤ ، $٤^٢$ ، $٤^٣$ } = { ٤ ، ٢ ، ٠ } ≠ $ص_٦$

⟨ ه ⟩ = { ه ، $ه^{٢}$ ، $ه^{٣}$ ، $ه^{٤}$ ، $ه^{٥}$ ، $ه^{٦}$ }

= { ٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ ، ٠ }

= ⟨ ١ ⟩ = $ص_{٦}$.

إذن مولّدات الزمرة $ص_{٦}$ هما العنصران ١ ، ٥ فقط .

مثال (١-٢٨) .

في المثال (١ – ٢٧) ، أثبت أن النظام (⟨ ٢ ⟩ ، ⊕) زمرة ، حيث ⟨ ٢ ⟩ ⊃ $ص_{٦}$ والعملية ⊕ هي نفسها عملية الجمع المعرفة على $ص_{٦}$.

الحل :

⊕	٠	٢	٤
٠	٠	٢	٤
٢	٢	٤	٠
٤	٤	٠	٢

جـــدول (١ – ٩)

من الجدول (١ – ٩) نستنتج أن :

(١) (⟨ ٢ ⟩ ، ⊕) نظام مغلق .

(٢) المحايد الجمعي وهو الصفر موجود في ⟨ ٢ ⟩ .

(٣) لكل عنصر في ⟨ ٢ ⟩ نظير جمعي ، حيث :

العنصر	٠	٢	٤
نظيره	٠	٤	٢

(٤) خاصة التجميع محققة ؛ لأن ⊕ عملية تجميعية .

إذن (⟨ ٢ ⟩ ، ⊕) زمرة . وحيث إن ⟨ ٢ ⟩ ⊃ $ص_{٦}$ فإننا نقول :

إن ⟨ ٢ ⟩ زمـرة جـزئية من الزمـرة $ص_{٦}$

وبصفة عامة نقـدم التعريـف الآتي :

تعـريـف (١ – ١١) :

إذا كانت (س ، *) زمرة وكانت ص مجموعة جزئية غير خالية من س بحيث يكون (ص ، *) زمرة فإن ص تسمى زمـرة جزئية من س ونـرمـز لـذلك بالرمـز ص ≤ س (ونقرأه ص زمرة جزئية من س) .

تدريب (١ – ٨٥)

في المثال (١ – ٢٧) أثبت أن ‹ ٣ › ⊇ صه_{2} رتبتها ٢ وهل هي دائرية ؟

مثال (١-٢٩) ٭

انظر إلى المربع المبين في الشكل (١ – ٥) حيث رُقّمت رؤوسه بالأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ونُصِّفت أضلاعه بالنقاط ﭐ ، ب ، حـ ، هـ

شكل (١ – ٥)

(ﭐ) سندرس أولاً مجموعة الدورانات في مستوى المربع حول مركزه « و » التي تحوِّل المربع إلى نفسه :

نعبِّر عن الدوران الموجب (أي الدوران في عكس اتجاه عقارب الساعة) بزاوية ٩٠ْ بالصورة

$$\text{د}_{1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

لاحظ أن د_{1} تطبيق تقابل مجاله = مجاله المقابل = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } وهو يحوّل الرأس ١ إلى الرأس ٢ والرأس ٢ إلى الرأس ٣ والرأس ٣ إلى الرأس ٤ والرأس ٤ إلى الرأس ١ .

ويكون الدوران بزاوية ١٨٠ْ في الاتجاه الموجب هو دوران موجب بزاوية ٩٠ْ يتبعه دوران موجب آخر بزاوية ٩٠ْ ، أي أن الدوران بزاوية ١٨٠ْ والذي نرمز له بالرمز د_{2} هو المحصلة .

$$\text{د}_{2} = \text{د}_{1} \circ \text{د}_{1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

وبالمثل يكون الدوران بزاوية ٢٧٠ْ هو :

$$\text{د}_{3} = \text{د}_{1} \circ \text{د}_{1} \circ \text{د}_{1} = \text{د}_{1} \circ \text{د}_{2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

أما الدوران بزاوية ٣٦٠ْ فهو :

$$\text{د}_{4} = \text{د}_{1} \circ \text{د}_{3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

وهذا الدوران يعيد المربع إلى وضعه الأصلي ، بعبارة أخرى فإن :

الدوران د$_{٤}$ لا يغيِّر وضع المربع

(ب) إذا كانت د$_{٥}$ ، د$_{٦}$ ، د$_{٧}$ ، د$_{٨}$ تمثل تناظرات (انعكاسات) المربع حول محاور تناظره أحـ ، ب هـ ، القطر الموصل بين الرأس ١ والرأس ٣ والقطر الموصل بين الرأس ٢ والرأس ٤ على الترتيب فإن :

د$_{٥}$ = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ، د$_{٦}$ = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

د$_{٧}$ = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ، د$_{٨}$ = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

وجميع هذه التناظرات هي تطبيقات تقابل مجال كل منها = مجاله المقابل = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

كما أن : د$_{٥}^{٢}$ = د$_{٦}^{٢}$ = د$_{٧}^{٢}$ = د$_{٨}^{٢}$ = د$_{٤}$ (تأكد من ذلك)

وبوضع سـ = { د$_{١}$ ، د$_{٢}$ ، د$_{٣}$ ، ..... د$_{٨}$ }

فإن (سـ ، ∘) زمرة غير إبدالية . حيث

يتبين من الجدول (١ - ١٠) أن :

(سـ ، ∘) نظام مغلق وأنه غير إبدالي

لعدم تناظر العناصر حول قطر الجدول

وأن به عنصراً محايداً هو د$_{٤}$ وأن لكل

عنصر فيه نظير حيث :

∘	د$_{١}$	د$_{٢}$	د$_{٣}$	د$_{٤}$	د$_{٥}$	د$_{٦}$	د$_{٧}$	د$_{٨}$
د$_{١}$	د$_{٢}$	د$_{٣}$	د$_{٤}$	د$_{١}$	د$_{٧}$	د$_{٨}$	د$_{٦}$	د$_{٥}$
د$_{٢}$	د$_{٣}$	د$_{٤}$	د$_{١}$	د$_{٢}$	د$_{٦}$	د$_{٥}$	د$_{٨}$	د$_{٧}$
د$_{٣}$	د$_{٤}$	د$_{١}$	د$_{٢}$	د$_{٣}$	د$_{٨}$	د$_{٧}$	د$_{٥}$	د$_{٦}$
د$_{٤}$	د$_{١}$	د$_{٢}$	د$_{٣}$	د$_{٤}$	د$_{٥}$	د$_{٦}$	د$_{٧}$	د$_{٨}$
د$_{٥}$	د$_{٨}$	د$_{٦}$	د$_{٧}$	د$_{٥}$	د$_{٤}$	د$_{٢}$	د$_{٣}$	د$_{١}$
د$_{٦}$	د$_{٧}$	د$_{٥}$	د$_{٨}$	د$_{٦}$	د$_{٢}$	د$_{٤}$	د$_{١}$	د$_{٣}$
د$_{٧}$	د$_{٥}$	د$_{٨}$	د$_{٦}$	د$_{٧}$	د$_{١}$	د$_{٣}$	د$_{٤}$	د$_{٢}$
د$_{٨}$	د$_{٦}$	د$_{٧}$	د$_{٥}$	د$_{٨}$	د$_{٣}$	د$_{١}$	د$_{٢}$	د$_{٤}$

جـدول (١ - ١٠)

العنصر	$د_1$	$د_2$	$د_3$	$د_4$	$د_5$	$د_6$	$د_7$	$د_8$
نظيره	$د_3$	$د_2$	$د_1$	$د_4$	$د_5$	$د_6$	$د_7$	$د_8$

أمّا خاصة التجميع فهي محققة لأن عملية تحصيل التطبيقات « ٥ » تجميعية ، نظرية (١ -٣)

تدريب (١ - ١٦)

في المثال (١ - ٢٩) أجب عما يلي : -

(١) أثبت أن (سهـ، ٥) زمرة غير دائرية رتبتها ٨ .

(٢) أثبت أن (< $د_1$ > ، ٥) زمرة دائرية وأوجد رتبتها .

(٣) أوجد ثلاث زمر جزئية مختلفة من الزمرة سهـ.

(٤) حل المعادلات الآتية في الزمرة سهـ .

(؟) $د_1^{-1}$ ٥ س = $د_5$

(ب) س ٥ $د_7^{-1}$ = $د_7$

(حـ) س ٥ $د_8$ = $د_3^{-1}$

تمارين (١ - ٦)

(١) أوجد حلول المعادلات الآتية في النظام ($\overset{\bullet}{صه}_{11}$ ، ⊙) ، إن وجدت :

(؟) س ⊙ ٣ = ٢   (حـ) ٥ ⊙ س = ١٠

(ب) ٧ ⊙ س = ١   (د) س ⊙ ٩ = ٢

(٢) أوجد حلول المعادلات الآتية في النظام ($صه_8$ ، ⊙) ، إن وجدت :

(؟) س ⊙ ٣ = ٣   (حـ) ٣ ⊙ س = ٥

(ب) ٢ ⊙ س = ١   (د) ٢ ⊙ س = ٦

(٣) برهن أن النظام ($ص_{ن}$ ، ⊙) مغلق وتجميعي وإبدالي وبه عنصر محايد ضربي هو العدد ١ ، عندما ن ≥ ٢ ، ن ∈ ط .

في التمارين (٤) إلى (١٠) إذا كانت الزمرة دائرية فعيِّن أحد مولداتها :

(٤) ({ ١ ، -١ } ، ·)

(٥) ($ص_{ن}$ ، ⊕)

(٦) ($ص^{*}_{١٣}$ ، ⊙)

(٧) ($ص_{ر}$ ، ⊕) ، حيث ر ∈ ط ، ر ≥ ٢

(٨) (س ، ⊙) ، حيث س = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } ، ⊙ عملية ضرب مقياس ١٠

(٩) (س ، ⊙) ، حيث س = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ } ، ⊙ عملية ضرب مقياس ٨

(١٠) ($ن^{*}$ ، ·)

(١١) في التمارين (٤) إلى (١٠) عيِّن رتبة الزمرة عندما تكون منتهية .

(١٢) في الزمرة ($ص^{*}_{١١}$ ، ⊙) احسب كلاً من :

(أ) $٣^{٢}$	(د) $٥^{-٤}$
(ب) $٢^{-٣}$	(هـ) $٧^{-١}$
(جـ) $١٠^{٥}$	(و) $٩^{-٩}$

(١٣) في الزمرة ($ص_{١٢}$ ، ⊕) عيِّن أربع زمر جزئية مختلفة للزمرة $ص_{١٢}$.

(١٤) هل ($ص_{١٠}$ ، ⊙) زمرة ؟ ولماذا ؟

(١٥) هل ($ص^{*}_{١٠}$ ، ⊙) زمرة ؟ ولماذا ؟

(١٦) ناقش صحة العبارة الآتية :

س زمرة دائرية ⟸ س زمرة إبدالية .

(١٧) اذكر سبباً واحداً فقط لكون العبارة فيما يلي خاطئة :

(٩) النظام ({ ١ ، ٢ } ، ⊙) زمرة جزئية من الزمرة (صه*٧ ، ⊙) .

(ب) النظام ({ ١ ، −١ } ، +) زمرة جزئية من الزمرة (صه ، +) .

(حـ) النظام (ك ، +) زمرة جزئية من الزمرة (صه ، +) .

١ – ١٠ النظام ذو العمليتين الثنائيتين :

تعرف أنّ عملية الجمع « + » على مجموعة الأعداد الكلية ك هي عملية ثنائية وقد رمزنا لذلك بالزوج المرتب (ك ، +) ، كما أن عملية الضرب « × » على المجموعة ك هي أيضا عملية ثنائية رمزنا لها بالزوج المرتب (ك ، ×) . وفي هذا البند سنرمز لعمليتي الجمع والضرب معاً على ك بالثلاثي المرتب (ك ، + ، ×) وندعوه نظاماًذا عمليتين ثنائيتين أو نظاماً مغلقاً بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب

وعادة نهتم بدراسة مثل هذا النظام (كما سنرى ذلك في باب « الأعداد المركبة » إن شاء الله) ومعرفة ما إذا كانت إحدى عمليتيه تتوزع على الأخرى ، فمثلاً ، في لنظام (ك ، + ، ×) نلاحظ أن

٣ × (٢ + ٥) = (٣ × ٢) + (٣ × ٥)

= (٢ × ٣) + (٥ × ٣) ، لأن العملية × إبدالية

= (٢ + ٥) × ٣

وبالمثـــــــل .

٧ × (٣ + ٢) = ٧ × ٣ + ٧ × ٢

= ٣ × ٧ + ٢ × ٧

= (٣ + ٢) × ٧

وبصفة عامة إذا كانت ٩ ، ب ، حـ ∋ ك فإن :

٩ × (ب + حـ) = ٩ × ب + ٩ × حـ

= ب × ٩ + حـ × ٩

= (ب + حـ) × ٩

ونعـبِّر عن ذلك بقولنا إن عملية الضرب تتوزع على عملية الجمع في ك .

تعريف (١ – ١٢) :

إذا كان (سـ ، * ، ٥) نظاماً ذا عمليتين ثنائيتين فإننا نقول إن العملية ٥ تتوزع على العملية * إذا كان لكل م ، ب ، حـ ∈ سـ يتحقق الشرطان :

م ٥ (ب * حـ) = (م ٥ ب) * (م ٥ حـ)

(ب * حـ) ٥ م = (ب ٥ م) * (حـ ٥ م)

مثال (١ – ٣٠) :

(١) في النظام (ح ، – ، ×) تتوزع عملية الضرب على عملية الطرح لأنه .

لكل م ، ب ، حـ ∈ ح فإن :

م × (ب – حـ) = م × [ب + (– حـ)]

= م × ب + م × (– حـ)

= ب × م + (– حـ) × م

= [ب + (– حـ)] × م

= (ب – حـ) × م

(٢) في النظام (ح ، + ، ×) لا تتوزع عملية الجمع على عملية الضرب أي أنه .

لكل م ، ب ، حـ ∈ ح فإن :

م + (ب × حـ) ≠ (م + ب) × (م + حـ) ، مالم يكن م = ٠

فمثلاً : ٥ + (٣ × ٤) = ٥ + ١٢ = ١٧

(٥ + ٣) × (٥ + ٤) = ٨ × ٩ = ٧٢

مثال (١ – ٣١) :

إذا كانت سـ مجموعة جميع المجموعات الجزئية لمجموعة معينة فإنك تعلم من دراستك السابقة أن كلاً من عمليتي التقاطع ∩ والاتحاد ∪ تتوزع على الأخرى . أي أنه في النظام (سـ ، ∪ ، ∩)

يتحقق مايلي :

(١) عملية التقاطع ∩ تتوزع على عملية الاتحاد ∪ .

(٢) عملية الاتحاد ∪ تتوزع على عملية التقاطع ∩ .

تدريب (١ - ١٧)

(١) هل عملية الضرب تتوزع على عملية الجمع في النظام (ن ، + ، ×) ، ولماذا ؟

(٢) هل عملية الجمع تتوزع على عملية الضرب في النظام (ن ، + ، ×) ، ولماذا ؟

(٣) هل عملية الضرب تتوزع على عملية الطرح في النظام (ص ، − ، ×) ، ولماذا ؟

(٤) هل عملية الطرح تتوزع على عملية الضرب في النظام (ص ، − ، ×) ، ولماذا ؟

تمارين عامة

(١) إذا كانت ⊗ عملية ثنائية على المجموعة ك معرّفة على النحو التالي :

س ⊗ ص = س + ص + س ص لكل س ، ص ∈ ك

فأجب عما يلي :

(أ) أحسب قيمة (٣ ⊗ ٤) ⊗ ٧ ،

٣ ⊗ (٤ ⊗ ٧) وقارن بينهما .

(ب) أثبت أن ⊗ إبدالية .

(جـ) ماهو العنصر المحايد للعملية ⊗ ؟

(د) هل العملية ⊗ تجميعية . ؟

(٢) إذا كانت * عملية ثنائية معرّفة على المجموعة ص على النحو التالي :

س * ص = س − ٢ ص

فأجب عما يلي :

(ﻫ) احسب قيمة (٦ * ٧) * ٢ ، ٦ * (٧ * ٢)

(ب) هل يوجد للعملية الثنائية * عنصر محايد ؟

(حـ) هل العملية الثنائية * إبدالية ؟ تجميعية ؟

(٣) لتكن العملية * معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية ح كالآتي :

ﻫ * ب = ﻫ - ب + ﻫ ب .

(ﻫ) أثبت أن * غير إبدالية .

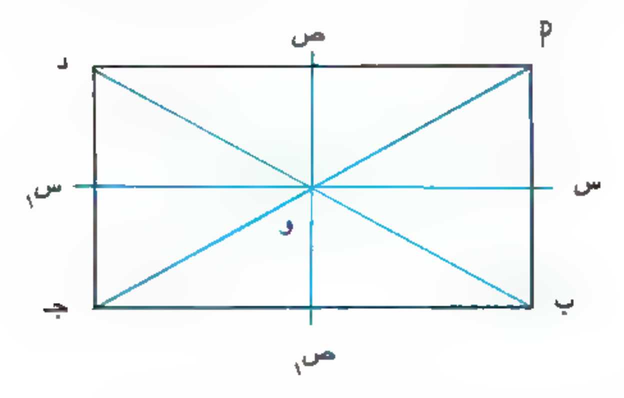
(ب) أوجد العنصر المحايد لهذه العملية إن أمكن .

(٤) (ﻫ) أكتب جدولاً لعملية تحصيل التطبيقات ○ على المجموعة

سـ = { د١ ، د٢ ، ل١ ، ل٢ } حيث :

د١ : دوران المستطيل ﻫ ب حـ د باتجاه دوران عقارب الساعة حول « و » بزاوية ٣٦٠°

د٢ : دوران المستطيل ﻫ ب حـ د باتجاه دوران عقارب الساعة حول « و » بزاوية ١٨٠°



ل١ : تناظر المستطيل ﻫ ب حـ د حول س س١

ل٢ : تناظر المستطيل ﻫ ب حـ د حول ص ص١

(ب) ادرس خواص العملية « ○ » من حيث :

(١) كونها عملية ثنائية على سـ .

(٢) كونها إبدالية أم لا .

(٣) وجود عنصر محايد في $س$.

(٤) وجود نظير لكل عنصر في $س$.

(حـ) هل ($س$، ٥) زمرة إبدالية ؟ ولماذا ؟

(د) هل ($س$، ٥) زمرة دائرية ؟ مع التعليل ؟ .

(٥) ادرس الأنظمة الواردة في التمارين (١) إلى (٣) وحدد ما إذا كان كل منها زمرة أم لا ، مع التبرير .

(٦) في الزمرة ($ص^*_{١٣}$ ، $\odot$) أجب عما يلي :

(ا) أكمل : $|ص^*_{١٣}|$ = . . .

(ب) ماهو العنصر المحايد في الزمرة $ص^*_{١٣}$ ؟

(حـ) ماهو نظير العنصر ٧ في $ص^*_{١٣}$ ؟

(د) هل ٢ مولِّد للزمرة $ص^*_{١٣}$ ؟ ولماذا ؟

(هـ) أكمل : $٢^{-٥}$ = . . .

(و) أوجد $|\langle ٣ \rangle|$

(ز) أوجد ثلاث زمر جزئية $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ للزمرة $ص^*_{١٣}$

بحيث تكون :

$|س_١| = ٢$ ، $|س_٢| = ٤$ ، $|س_٣| = ٦$

(٧) ناقش صحة كل من العبارتين الآتيتين :

(ا) « $*$ عملية ثنائية معرَّفة على $س$ $\Leftarrow\Rightarrow$ ($س$ ، $*$) نظام ذو عملية »

(ب) « النظام ($ص_ن$ ، $\odot$) ليس زمرة لأي عدد طبيعي ن »

(٨) بين ما إذا كانت إحدى العمليتين تتوزع على الأخرى في الأنظمة الآتية

(ا) (ط ، + ، ×) (ب) (ن ، − ، ×) (حـ) (ح ، + ، −) (د) ($ح^*$ × ، ÷)

الباب الثاني

المصفوفات والمحددات

٢ - ١ تمهيد .

٢ - ٢ بعض أنواع المصفوفات المشهورة .

٢ - ٣ جمع المصفوفات وضرب مصفوفة بعدد حقيقي.

٢ - ٤ ضرب المصفوفات .

٢ - ٥ النظير الضربي لمصفوفة .

٢ - ٦ بعض التطبيقات البسيطة على المصفوفات .

أولاً : حل نظام المعادلات من الدرجة الأولى في مجهولين

ثانياً : تطبيقات متنوعة .

٢ - ٧ استخدام المحددات من الدرجتين الثانية والثالثة في حل أنظمة المعادلات الخطية .

٢ - ١ تمهيد :

نبدأ هذا الباب بدراسة المصفوفات ثم نأتي على دراسة المحددات في نهاية الباب . إن لدراسة المصفوفات في الرياضيات أهمية كبرى إذ أنها تستخدم في العديد من فروع هذا العلم وتطبيقاته ، ومن ذلك استخدام المصفوفات في حل أنظمة المعادلات الخطية وفي حل مسائل البرمجة الخطية والتي تطرقت لحالات مبسطة منها في الصف الأول الثانوي وتأتي أهمية المصفوفات من أنها تستخدم لتمثيل دوال التحويلات الخطية في موضوع الجبر الخطي . إن للرياضيات تطبيقاتها الكثيرة في العديد من العلوم الإنسانية والاقتصادية والفيزيائية والهندسية وهذا يتمثل بصورة خاصة في المصفوفات والتي لايستغني عن دراستها المشتغلون في علوم الاقتصاد والاجتماع والفيزياء والإحصاء والهندسة بأنواعها . بالنسبة لتاريخ دراسة المصفوفات فربما يكون أول من استخدمها هو العالم البريطاني كيلي (الذي عاش الفترة من ١٨٢١ - ١٨٩٥م) . لغرض تقديم تعريف المصفوفات ، نستعرض المثال التالي .

مثال (٢-١)

لنفرض أن لدينا أربعة طلاب ٩ ، ب ، حـ ، د كانت درجاتهم في اختبار مادة التفسير هي على الترتيب ٨٥ ، ٧٢ ، ٦٣ ، ٩٠ وفي الحديث الشريف ٧٥ ، ٨٤ ، ٧٠ ، ٨٨ على الترتيب . أما درجاتهم في التوحيد فهي على الترتيب ٦٠ ، ٧٦ ، ٥٨ ، ٨٤ .

يمكن تنظيم هذه المعلومات في جدول مستطيل من ثلاثة صفوف وأربعة أعمدة كما يلي :

	٩	ب	حـ	د
التفسير	٨٥	٧٢	٦٣	٩٠
الحديث الشريف	٧٥	٨٤	٧٠	٨٨
التوحيد	٦٠	٧٦	٥٨	٨٤

إن الصف الأول في هذا المستطيل يعبر عن درجات الطلاب في التفسير ، والصف الثاني يعبر عن درجاتهم في الحديث الشريف ، أما الصف الثالث فيعبر عن درجات الطلاب في التوحيد ، كما أن العمود الأول يعبر عن درجات الطالب أ في المواد الثلاث معاً ، والعمود الثاني يعبرعن درجات الطالب ب في المواد الثلاث معاً ، والعمود الثالث يعبر عن درجات الطالب حـ في المواد الثلاث معاً ، أما العمود الرابع فيعبر عن درجات الطالب د في المواد الثلاث معاً .

إن هذا الجدول يعبر عن مصفوفة ، وقد اصطلح على أن تكتب على الصورة :

$$\begin{bmatrix} ٨٥ & ٧٢ & ٦٣ & ٩٠ \\ ٧٥ & ٨٤ & ٧٠ & ٨٨ \\ ٦٠ & ٧٦ & ٥٨ & ٨٤ \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{pmatrix} ٨٥ & ٧٢ & ٦٣ & ٩٠ \\ ٧٥ & ٨٤ & ٧٠ & ٨٨ \\ ٦٠ & ٧٦ & ٥٨ & ٨٤ \end{pmatrix}$$

وسنختار الاصطلاح الأول في هذا الكتاب . كما تجدر الملاحظة إلى أن المصفوفة السابقة مكونة من ١٢ عنصراً موزعة في ٣ صفوف و ٤ أعمدة لذا يقال إنها مصفوفة من النوع ٣ × ٤

وبصفة عامة نقدم التعريفين الآتيين :

تعريـــف (٢ - ١) :

المصفوفة عبارة عن تنظيم عددي مؤلف من م . ن عنصراً ، مرتبة في جدول مستطيل مكون من م صفاً ، ن عموداً . حيث م ، ن عددان طبيعيان .

تعريـــف (٢ – ٢) :

نقـول عن مصـفوفة إنها من النوع م × ن وتقرأ م في ن إذا كانت تحتوي صفوفاً عددها م وأعـمدة عددها ن كما نقـــول اختصاراً إنـها مصفـوفة م × ن حيث م ، ن عـددان طبيـعيان .

سنرمز للمصـفوفة بحرف تحته خط مثل أ ، ب ، جـ ، . خشـية الالـتباس بـين المصفوفـة وعناصرها .

كما يجب الانـتباه إلى أن عـناصر أي مصفــوفة في هذا الـباب تنـتمي إلى مجموعة الأعـداد الحقيقة ح .

مثال (٢-٢) :

إن كلاً من التنظيمات لعددية التالية هو عبارة عن مصفوفة حسب لتعريف (٢ – ١) :

(١) أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ١ & ٤ \\ ٢- & ٥ & ٧- \end{bmatrix}$

(٢) ب = $\begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٠ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$

(٣) جـ = $\begin{bmatrix} ب & أ \\ د & جـ \end{bmatrix}$

(٤) س = $\begin{bmatrix} س_{٤١} & س_{٣١} & س_{٢١} & س_{١١} \\ س_{٤٢} & س_{٣٢} & س_{٢٢} & س_{١٢} \\ س_{٤٣} & س_{٣٣} & س_{٢٣} & س_{١٣} \end{bmatrix}$

لاحظ أن المصفوفة أ في الفقرة (١) هي عبارة عن ستة عناصر مرتبة في صفين وثلاثة أعمدة .

إن عناصر الصف الأول هي ٤ ، ١ ، ٣ وعناصر الصف الثاني هي - ٧ ، ٥ ، -٢ بينما عناصر العمود الأول هي ٤ ، - ٧ وعناصر العمود الثاني هي ١ ، ٥ وعناصر العمود الثالث هي ٣ ، -٢

وحسب التعريف (٢ - ٢) نقول :

إن أ مصفوفة من النوع ٢ × ٣ ، حيث م = ٢ ، ن = ٣ .

إن ب مصفوفة من النوع ٣ × ٢ حيث م = ٣ ، ن = ٢ ،

جـ مصفوفة من النوع ٢ × ٢ حيث م = ٢ ، ن = ٢ ،

أما المصفوفة س فهي من النوع ٣ × ٤ (لماذا ؟)

تدريب (٢ - ١)

في كل من الفقرات (٢) ، (٣) ، (٤) عين عناصر الصفوف والأعمدة لكل مصفوفة كما فعلنا في الفقرة (١) .

بصفة عامة إذا كانت س مصفوفة من النوع م × ن فإننا نكتب س على الصورة التالية

$$\text{س} = \begin{bmatrix} \text{س}_{11} & \text{س}_{21} & \cdots & \text{س}_{1\text{ن}} \\ \text{س}_{12} & \text{س}_{22} & \cdots & \text{س}_{2\text{ن}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{س}_{1\text{م}} & \text{س}_{2\text{م}} & & \text{س}_{\text{م ن}} \end{bmatrix}$$

ورغبة في الاختصار نكتب المصفوفة س بالصورة :

س = [$\text{س}_{\text{ى هـ}}$] حيث ى = ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . . . ، م

هـ = ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . . . ، ن .

إن $\text{س}_{\text{ى هـ}}$ يمثل عنصراً عاماً في المصفوفة س حيث ترمز ى إلى ترتيب الصف الذي يقع فيه العنصر ، بينما ترمز هـ إلى ترتيب العمود الذي يقع فيه هذا العنصر وبذلك يتعين العنصر $\text{س}_{\text{ى هـ}}$ تماماً بمعرفة قيمتي ى ، هـ معاً وبعبارة أخرى ، فإن العنصر $\text{س}_{\text{ى هـ}}$ هو عنصر المصفوفة س الذي يقع في تقاطع الصف ذى الترتيب ى والعمود ذي الترتيب هـ

إن عناصر الصف ذي الترتيب ى في المصفوفة س هي

$س_{ى١} ، س_{ى٢} ، س_{ى٣} ، . . . ، س_{ىن}$

وعناصر العمود ذي الترتيب هـ في المصفوفة س هي :

$س_{١هـ} ، س_{٢هـ} ، س_{٣هـ} ، . . . . . . ، س_{مهـ}$

مثال (٢ - ٣) :

إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ -٤ & ١ & ٥ \end{bmatrix}$

فعين قيم جميع العناصر $س_{ىهـ}$

الحل :

بما أن المصفوفة من النوع ٢ × ٣ فإن

ى = ١ ، ٢ بينما هـ = ١ ، ٢ ، ٣ وبالتالي فإن .

$س_{ىهـ}$ له ستة قيم هي .

العنصر الذي يقع في الصف الأول والعمود الأول = $س_{١١}$ = ١

العنصر الذي يقع في الصف الأول والعمود الثاني $س_{٢١}$ = -١

وبالمثل $س_{٣١}$ = ٢ ، $س_{١٢}$ = -٤ ، $س_{٢٢}$ = ١ ، $س_{٣٢}$ = ٥ .

تعريف (٢ - ٣) :

نقول إن المصفوفتين س ، ص متساويتان ونكتب س = ص إذا تحقق الشرطان التاليان معاً .

(١) س ، ص من نوع واحد أي أن عدد صفوف س يساوي عدد صفوف ص وعدد أعمدة س يساوي عدد أعمدة ص .

(٢) $س_{ىهـ} = ص_{ىهـ}$ لجميع قيم ى ، هـ المكنة ، حيث ى ، هـ عددان طبيعيان .

مثال (٢-٤) :

عيِّن قيم ﺃ ، ب ، حـ ، د إذا علمت أن :

$$\underline{س} = \begin{bmatrix} ﺃ - ب & -٤ \\ ٢ حـ + ٣ & ٥ \end{bmatrix}$$

$$\underline{ص} = \begin{bmatrix} ١ & د + ب \\ ٩ & ١ - ب \end{bmatrix}$$

وأن $\underline{س} = \underline{ص}$

الحل :

من تعريف تساوي مصفوفتين نجد أن :

ﺃ - ب = ١ (٢ - ١)

٢ حـ + ٣ = ٩ (٢ - ٢)

د + ب = - ٤ (٢ - ٣)

١ - ب = ٥ (٢ - ٤)

من المعادلة (٢ - ٤) نجد أن ب = - ٤ ومن (٢ - ١) نجد أن

ﺃ = ١ + ب = ١ - ٤ = - ٣ .

من المعادلة (٢ - ٢) نجد أن حـ = ٣ وأخيراً نحصل على قيمة د ، من المعادلة (٢ - ٣)

حيث د = -٤ - ب = - ٤ + ٤ = صفراً .

تدريب (٢ ٢)

(١) ماعدد العناصر في كل من المصفوفات الآتية :

(أ) مصفوفة من النوع ٢ × ٣ (ب) مصفوفة من النوع ٧ × ٨

(حـ) مصفوفة من النوع ٧ × ٧ (د) مصفوفة من النوع ١٢ × ١٢

(هـ) مصفوفة من النوع ن × ن (و) مصفوفة من النوع م × ن

(٢) أوجد قيمة كل من أ ، ب ، حـ ، د إذا كان :

$$\begin{bmatrix} \text{أ} - ٢ & ٢\text{ب} + ١ \\ \text{أ} + ٣ & ١٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ \text{حـ} & ٣\text{د} - ٢ \end{bmatrix}$$

تمارين (٢ - ١)

(١) أربع مدن هي أ ، ب ، حـ ، د ، فإذا كانت المسافة بالكيلومترات بين أي مدينتين موضحة في الجدول التالي :

	أ	ب	حـ	د
أ	٠	٦٥	٧٠	٢١١
ب	٦٥	٠	٤٦	٢٢
حـ	٧٠	٤٦	٠	١٨٥
د	٢١١	٢٢	١٨٥	٠

فأجب عما يلي :

أولاً : اكتب مصفوفة تمثل هذه المعلومات

ثانياً : بفرض أن س هي المصفوفة المطلوبة في أولاً

أوجد مايلي :

(أ) $\text{س}_{٢٢}$ وماذا يعني ذلك ؟

(ب) $\text{س}_{٢٣}$ وماذا يعني ذلك ؟

(حـ) ما هي العلاقة بين $\text{س}_{٣٢}$ ، $\text{س}_{٢٣}$ ؟

(د) اكتب جميع عناصر الصف الثاني للمصفوفة س .

(هـ) اكتب جميع عناصر العمود الثاني للمصفوفة س .

(و) ماذا يمكن استنتاجه من (د) ، (هـ) ؟

(ز) أوجد $\text{س}_{\text{ى ى}}$ عندما ى = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ .

ماذا تلاحظ مع إبداء السبب ؟

(ح) أكمل مايلي :

(١) سٍ مصفوفة من النوع . . . . . .

(٢) $س_{ى هـ} = س_{هـ ى}$ لجميع قيم . . . .

(ط) هل تلاحظ أن سٍ هي مصفوفة تتمتع بخواص معينة لا تنطبق على المصفوفات بشكل عام أم لا ؟

(٢) أوجد قيمة كل من ٩ ، ب ، حـ ، د

إذا علمت أن :

$$\begin{bmatrix} ٣٩ & ١٠ \\ ٢٩ + حـ & ٢ب - د \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥ & ٢ب \\ ١٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

(٣) اكتب المصفوفة ٩ إذا علمت أن ٩ مصفوفة ٤ × ٥ وأن عناصر الصف الأول هي ٩ ، ب ، حـ ، د ، هـ على الترتيب وعناصر الصف الثاني هي َ٩ ، َب ، َحـ ، َد ، َهـ على الترتيب وأن عناصر الصف الثالث هي نفس عناصر الصف الأول بعد ضرب كل عنصر في $\frac{٢}{٣}$ ، بينما عناصر الصف الرابع هي نفس عناصر الصف الثاني بعد ضرب كل عنصر في (- ٢) .

(٤)

	د	هـ
٩	١٥٠	١٥٠
ب	١٥٠	١٠٠
حـ	٢٠	١٠٠

جـــدول(١)

	َد	َهـ
َ٩	س +٥٠	٢ع -٥٠
َب	ص	$\frac{٢٠}{٣}$ ل
َحـ	$\frac{٤}{٣}$ ل	٢ع - س

جـــدول(٢)

الجـدول (١) يبين أجـور المكالمات الهاتـفية في الدقيقة الواحدة بالهللات من ٩ ، ب ، حـ إلى المدينتين د ، هـ والجدول (٢) يمثـل أجور المكالمات الهاتـفية في الدقيقة الواحـدة بالهـللات من

المدن أ ، بَ ، حـَ إلى المدينتين دَ ، هـَ ، والمطلوب :

(أ) كتابة مصفوفة تعبر عن الجدول (١) وتبيان نوعها وعدد عناصرها .

(ب) كتابة مصفوفة تعبر عن الجدول (٢) .

(حـ) إذا علمت أن المصفوفتين المعبرتين عن الجدولين (١) ، (٢) متساويتان فأوجد قيم كل من س ، ص ، ع ، ل .

٢ - ٢ بعض أنواع المصفوفات المشهورة :

(١) المصفوفة المستطيلة :

وهي مصفوفة من النوع م × ن حيث م $\neq$ ن وفي الحالة التي يكون فيها م = ١ فإن المصفوفة تسمى « مصفوفة صف » أي أن مصفوفة الصف هي من النوع ١ × ن وعندما تكون ن = ١ فإن المصفوفة تسمى « مصفوفة عمود » أي أن مصفوفة العمود من النوع م × ١ .

(٢) المصفوفة المربعة :

وهي المصفوفة من النوع ن × ن أي أن عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها . لاحظ أنه في أي مصفوفة مربعة $\underline{س}$ حيث $\underline{س}$ = [$س_{ى هـ}$] تسمى العناصر $س_{ى ى}$ بالقطر الأساسي للمصفوفة $\underline{س}$.

(٣) المصفوفة القطرية :

وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ما عدا العناصر الواقعة على القطر فيكون أحدها على الأقل مغايراً للصفر .

(٤) مصفوفة الوحده :

وهي مصفوفة قطرية يكون فيها كل من العناصر الواقعة على القطر مساوياً الواحد وسنرمز لها بالرمز $\underline{م}_{ن}$ أو بالرمز $\underline{م}$ إذا لم نخش الالتباس .

(٥) المصفوفة الصفرية :

وهي المصفوفة م × ن وجميع عناصرها أصفار . وسنرمز لها بالرمز « $\underline{ث}_{م \times ن}$ » أو بالرمز « $\underline{ث}$ » إذا لم نخش الالتباس .

ويلاحظ أن م قد تساوي ن هنا وعندها نكتفي بالرمز « سن » أو بالرمز « سـ » فقط

مثال (٢ ٥) :

(١) المصفوفة : $\begin{bmatrix} ٣- & ٢ & ٦ \\ ٤ & ١- & ١٠ \end{bmatrix}$ مستطيلة فيها م = ٢ ، ن = ٣

(٢) المصفوفة : $\begin{bmatrix} ٤- & ٠ & ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ مصفوفة صف فيها م = ١ ، ن = ٤

(٣) المصفوفة : $\begin{bmatrix} ٣ \\ ٠ \\ ١ \end{bmatrix}$ مصفوفة عمود ، فيها م = ٣ ، ن = ١

(٤) المصفوفة : $\begin{bmatrix} ٥ & ١- & ٣ \\ ٠ & ٢ & ٦- \\ ٦ & ٣ & ٧ \end{bmatrix}$

مصفوفة مربعة ٣ × ٣ قطرها الأساسي الأعداد ٣ ، ٢ ، ٦ وقطرها الآخـر (الثانوي) الأعداد ٥ ، ٢ ، ٧ .

(٥) المصفوفة : $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١- & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

مصفوفة قطرية ٣ × ٣ قطرها هو ١ ، -١ ، ٢

(٦) كل من المصفوفات $\begin{bmatrix} ١ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$
هي مصفوفة وحدة .

(٧) كل من المصفوفات : $\begin{bmatrix} ٠ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

هي مصفوفة صفرية . لاحظ أن كل واحدة منها تختلف عن الأخرى فمثلا : $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \end{bmatrix}$

لأن اليمنى من النوع ١ × ٢ أما اليسرى فمن النوع ٢ × ١ .

٢ – ٣ جمع المصفوفات وضرب مصفوفة بعدد حقيقي :

جمع المصفوفات :

إن للمصفوفات بناءاً جبرياً يمكن من خلاله أن نجري العديد من العمليات الحسابية مثل الجمع والضرب ولكن هناك قيود على هذه العمليات تتعلق بنوع كلٍ من المصفوفتين الخاضعتين للعملية الجبرية . سنبدأ في هذا البند بعملية الجمع . فإذا كان لدينا :

$$\underline{س} = \begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ ٢ & ٥ \\ ٧ & ٣ \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{ص} = \begin{bmatrix} ١١ & ٧ \\ -١٥ & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

وهما من النوع نفسه (٣ × ٢) فإنه من الطبيعي أن يكون حاصل جمع $\underline{س}$ + $\underline{ص}$ مصفوفة من النوع نفسه (٣ × ٢) وعناصرها هي حاصل جمع عناصر المصفوفتين $\underline{س}$ ، $\underline{ص}$ أي أن :

$$\underline{س} + \underline{ص} = \begin{bmatrix} -١ + ١١ & ٤ + ٧ \\ ٢ + (-١٥) & ٥ + ٢ \\ ٧ + ٢ & ٣ + ٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١٠ & ١١ \\ -١٣ & ٧ \\ ٩ & ٧ \end{bmatrix}$$

ماذا لو كان نوعا المصفوفتين المراد جمعهما مختلفين ؟

هل يمكن جمعهما ؟ نرجو أن تكون قد عرفت الجواب .

على أية حال ها نحن نورد تعريف جمع مصفوفتين مما يجيب على السؤال :

تعريــف (٢ - ٤) :

إذا كانت س = [سي هـ] ، ص = [صي هـ] مصفوفتين كل منهما من النـوع (م × ن)
فإن مجموعهما هـو مصـفوفة من النوع نفـسه وهي :
ع = [عي هـ] ، حيث عي هـ = سي هـ + صي هـ .

إن هذا التعريف يعني أننا نستطيع جمع أي مصفوفتين س ، ص إذا وإذا فقط كانتا من النوع نفسه (م × ن) وحينئذ يمكننا أن نكتب مجموعهما بالصورة .

س + ص = [سي هـ] + [صي هـ]

= [سي هـ + صي هـ] .

أي أننا نحصل على مصفوفة جديدة من النوع نفسه كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين بالوضع في س ، ص .

مثال (٢ - ٦) :

إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ & ٧ \\ ١ & ٦ & -٥ \end{bmatrix}$

ص = $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ & -٢ \\ -٧ & ٣ & ٥ \end{bmatrix}$

فأوجد : س + ص

الحل :

بما أن المصفوفتين س ، ص من النوع نفسه فإن الجمع ممكن (معرف) .

$$\underline{\text{س}} + \underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ & ٧ \\ ١ & ٦ & -٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ٣ & -٢ \\ -٧ & ٣ & ٥ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٣ + ٤ & (-٢) + ٣ & ٧ + (-٢) \\ ١ + (-٧) & ٦ + ٣ & (-٥) + ٥ \end{bmatrix}$$ من التعريف (٢ – ٤)

$$= \begin{bmatrix} ٧ & ١ & ٥ \\ -٦ & ٩ & ٠ \end{bmatrix}$$

تدريب (٢ – ٣)

في المثـال (٢ – ٦) أوجد كلاً من :

$\underline{\text{ص}} + \underline{\text{س}}$ ، $\underline{\text{س}} + \underline{\text{س}}$

هل يمكن جمع المصفوفة $\underline{\text{س}}$ مع المصفوفة $\underline{\text{ع}}$

علماً بأن :

$$\underline{\text{ع}} = \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ ٣ & ٣ \\ -٧ & ٤ \end{bmatrix}$$

ولماذا ؟

وازن بـين $\underline{\text{س}} + \underline{\text{ص}}$ ، $\underline{\text{ص}} + \underline{\text{س}}$

ماذا تلاحظ ؟

ضرب مصفوفة بعدد حقيقي :

الجدول الآتي يبين أجور المكالمات الهاتفية بين المدن المذكورة فيه بالريالات للدقيقة الواحدة .

	الخـرج	عفيف	مـرات
الطـائف	١ر٥	١	١ر٥
ساجـر	١	١	٢ر٠

إن المصفوفة

$$\underline{س} = \begin{bmatrix} ١٫٥ & ١ & ١٫٥ \\ ٠٫٢ & ١ & ١ \end{bmatrix}$$ تمثل هذا الجدول

لو ضربنا كل عنصر من عناصر هذه المصفوفة بالعدد ١٠٠ لظهرت معنا مصفوفة أخرى تعبر عن الأجور بين تلك المدن بالهللات ونكون بذلك قد ضربنا المصفوفة $\underline{س}$ بالعدد ١٠٠ أي أن :

$$١٠٠\ \underline{س} = ١٠٠ \begin{bmatrix} ١٫٥ & ١ & ١٫٥ \\ ٠٫٢ & ١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥٠ & ١٠٠ & ١٥٠ \\ ٢٠ & ١٠٠ & ١٠٠ \end{bmatrix}$$

وبالتالي نقدم تعريف ضرب مصفوفة بعدد حقيقي بشكل عام :

تعريـــف (٢ – ٥) :

إذا كانت $\underline{س} = [\,س_{ى\,هـ}\,]$ مصفوفة م × ن وكان ك ∈ ح

فإن حاصل ضرب المصفوفة $\underline{س}$ بالعدد الحقيقي ك هو المصفوفة $\underline{ع} = [\,ع_{ى\,هـ}\,]$ حيث

$ع_{ى\,هـ} = ك \cdot س_{ى\,هـ}$ لجميع قيم ى ، هـ الممكنة أي أن : $ك \cdot \underline{س} = [\,ك \cdot س_{ى\,هـ}\,]$

في التعريف (٢ – ٥) لما كانت ك ، $س_{ى\,هـ}$ ∈ ح فإن :

$ك \cdot س_{ى\,هـ} = س_{ى\,هـ} \cdot ك$ لجميع قيم ى ، هـ الممكنة وبالتالي فإن :

$$[\,ك \cdot س_{ى\,هـ}\,] = [\,س_{ى\,هـ} \cdot ك\,]$$

وهذا يعني أن بإمكاننا أن نكتب $ك \cdot \underline{س} = \underline{س} \cdot ك$ ولعلك تلاحظ أن المصفوفة الناتجة من النوع نفسه .

مثال (٢ – ٧) :

إذا كانت س = $\begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٤ & ٢ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ فأوجد المصفوفة ك . س عندما تكون ك = ٢

الحل :

بتطبيق التعريف (٢ – ٥) مباشرة نجد أن :

ك . س = ٢ س = ٢ $\begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٤ & ٢ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٢ \times (-٣) & ٢ \times ١ \\ ٢ \times ٤ & ٢ \times ٢ \\ ٢ \times (-١) & ٢ \times ٠ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -٦ & ٢ \\ ٨ & ٤ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix}$

تدريب (٢ – ٤)

في المثال (٢ – ٧) أوجد ك . س عندما تكون :

(أ) ك = $\frac{١}{٢}$

(ب) ك = – ١

(جـ) ك = $\sqrt{٢}$

تعريف (٢ – ٦) :

إذا كانت س ، ص مصفوفتين م × ن فإن الفرق س – ص يعرف كما يلي :

س – ص = س + (–١) ص

وهذا يعني أن ع = س – ص حيث : $ع_{ى هـ} = س_{ى هـ} - ص_{ى هـ}$ لجميع قيم ى ، هـ الممكنة .

مثال (٢ – ٨) :

إذا كانت

س = $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

فأوجد : س – ص

الحل :

س – ص = $\begin{bmatrix} 2-(-2) & -3-1 & 5-3 \\ -6-0 & 1-7 & 0-(-1) \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -6 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ (١)

تدريب (٢ – ٥)

في المثال (٢ – ٨) أوجد : ص – س

ثم وازن بين س – ص ، ص – س

ماذا تلاحظ ؟

خواص جمع المصفوفات وضربها بعدد حقيقي

(أ) خــواص جمع المصفــوفات

إذا كانت سـ مجموعة المصفوفات من النوع م × ن فإن النظام (سـ ، +) ، حيث « + » عملية جمع المصفوفات يتمتع بالخواص الآتية :

(١) العملية « + » ثنائية على سـ لأنه :

لكل س ، ص ∈ سـ فإن س + ص ∈ سـ وذلك وفق التعريف (٢ – ٤) .

(٢) العملية « + » إبدالية لأنه :

لكل س ، ص ∈ سـ فإن :

س + ص = [$س_{ير}$ + $ص_{ير}$] وفق التعريف (٢ - ٤)

= [$ص_{ير}$ + $س_{ير}$] لأن عملية الجمع في ح إبدالية .

= ص + س وفق التعريف (٢ - ٤) .

(٣) العملية « + » تجميعية (دامجة) لأن :

لكل س ، ص ، ع ∈ سـ فإن :

(س + ص) + ع = [($س_{ير}$ + $ص_{ير}$) + $ع_{ير}$] وفق التعريف (٢ - ٤)

= [$س_{ير}$ + ($ص_{ير}$ + $ع_{ير}$)] لأن عملية الجمع في ح تجميعية .

= س + (ص + ع) ، لماذا ؟

(٤) يوجد في سـ عنصر محايد ، هو المصفوفة الصفرية $\overline{0}_{م ن}$ لأنه :

لكل س ∈ سـ فإن :

س + $\overline{0}_{م ن}$ = س

(٥) لكل مصفوفة س ∈ سـ يوجد مصفوفة .

ص = (-١) س ∈ سـ بحيث يكون :

س + ص = $\overline{0}_{م ن}$

تسمى المصفوفة ص المعكوس (النظير) الجمعي للمصفوفة س ونرمز لذلك بالرمز (- س) ونستنتج من ذلك أن : (-١) س = - س

ملحوظة (٢ - ١)

لعلك تلاحظ أن الخواص السابقة يمكن إيجازها في قولنا « إن النظام (سـ ، +) زمرة إبدالية » .

(ب) خواص ضرب مصفوفة بعدد حقيقي :

إذا كانت $\underline{س}$ ، $\underline{ص}$ مصفوفتين م × ن وكان ك ، ل ∈ ح فإن :

(أ) ك . ($\underline{س}$ + $\underline{ص}$) = ك . $\underline{س}$ + ك . $\underline{ص}$

(ب) (ك + ل) . $\underline{س}$ = ك . $\underline{س}$ + ل . $\underline{س}$

(جـ) ك . (ل . $\underline{س}$) = (ك ل) . $\underline{س}$

(د) ك . $\underline{س}$ = $\underline{0}$ ⟺ ك = ٠ أو $\underline{س}$ = $\underline{0}$

(هـ) ك . $\underline{س}$ = ك . $\underline{ص}$ ، ك ≠ ٠ ⟸ $\underline{س}$ = $\underline{ص}$

(و) ١ . $\underline{س}$ = $\underline{س}$ . .

يعتمد برهان هذه الخواص على فرض أن :

$\underline{س}$ = [$س_{يه}$] ، $\underline{ص}$ = [$ص_{يه}$] والأخذ بعين الاعتبار تعريف جمع مصفوفتين ،

وتعريف ضرب مصفوفة بعدد حقيقي وأن العناصر $س_{يه}$ + $ص_{يه}$ ∈ ح .

سنبرهن على صحة الفقرة (أ) ، ونترك الفقرات الباقية كتمرين للطالب :

(أ) لنفرض [$ع_{يه}$] = $\underline{ع}$ = $\underline{س}$ + $\underline{ص}$ فيكون :

ك . ($\underline{س}$ + $\underline{ص}$) = ك . $\underline{ع}$

= [ك $ع_{يه}$] ، تعريف (٢ - ٥)

= [ك ($س_{يه}$ + $ص_{يه}$)] لأن $ع_{يه}$ = $س_{يه}$ + $ص_{يه}$

= [ك . $س_{يه}$ + ك . $ص_{يه}$] لأن عملية الضرب تتوزع على عملية الجمع في ح

= [ك . $س_{يه}$] + [ك . $ص_{يه}$] ، وفق التعريف (٢ - ٤) .

= ك . $\underline{س}$ + ك . $\underline{ص}$ ، لماذا ؟ .

مثال (٢ - ٩)

إذا كانت $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ ، $\underline{س}$ ∈ سم حيث سم مجموعة المصفوفات م × ن فأوجد $\underline{س}$ التي هي حل للمعادلة :

$\underline{س}$ + $\underline{ب}$ = $\underline{أ}$ (١)

الحل :

بإضافة المصفوفة – ب إلى طرفي المعادلة (١) نجد أن :

س + ب + (– ب) = أ + (– ب)

أو

س + (ب + (– ب)) = أ – ب خاصة التجميع (الدمج) في جمع المصفوفات .

س + ٠ = أ – ب خاصة العنصرين المتناظرين بالنسبة لجمع المصفوفات .

س = أ – ب خاصة العنصر المحايد الجمعي

ملحوظة (٢ – ٢)

إن – ب هي النظير الجمعي للمصفوفة ب ، وهو نظير وحيد والعنصر المحايد (٠) وحيد وبالتالي يكون :

س = أ – ب حلاً وحيداً للمعادلة (١) .

مثال (٢ - ١٠)

إذا كانت :

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٢- & ٥ \end{bmatrix}$$

فأوجد حل المعادلة : س + ب = أ وتحقق من صحة الناتج .

الحل :

اعتماداً على ما حصلنا عليه في المثال (٢ – ٩) يكون الحل هو :

س = أ – ب

$$= \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٢- & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$$

التحقيق :

$$\text{الطرف الأيمن} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٢- & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$$

= الطرف الأيسر

تدريب (٢ - ٦)

(١) قم ببرهان الخواص (ب) ، (حـ) ، (د) ، (هـ) ، (و) من خواص ضرب مصفوفة بعدد حقيقي .

(٢) أوجد حل المعادلة $\underline{\text{س}} + \underline{\text{ﺃ}} = \underline{\text{ب}}$ علماً بأن :

$$\underline{\text{ﺃ}} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ١ & -٣ \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{\underline{\text{ب}}} = \begin{bmatrix} ١ & -١ & -٢ \\ -١ & ٠ & ٤ \end{bmatrix}$$

مثال (٢ - ١١) .

حل المعادلة المصفوفية الآتية :

$$-٣ \left\{ \underline{\text{س}} - \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix} \right\} = (-٤)\, \underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$$

الحل :

باستخدام الفقرات (ﺃ) ، (ب) ، (حـ) من خواص ضرب مصفوفة بعدد حقيقي ينتج :

$$(-٣) \,.\, \underline{\text{س}} + (-٣)\,(-١) \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix} = (-٤)\, \underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$$

$$\Longleftarrow \quad (-٣) \,.\, \underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ -٣ & ٠ \end{bmatrix} = (-٤)\, \underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$$

$$\Longleftarrow \quad ٤ \,.\, \underline{\text{س}} + (-٣) \,.\, \underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ -٣ & ٠ \end{bmatrix} = ٤ \,.\, \underline{\text{س}} + (-٤)\, \underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$$

$$\Longleftarrow \quad \Big(٤ + (-٣) \Big)\, \underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ -٣ & ٠ \end{bmatrix} = \Big(٤ + (-٤) \Big)\, \underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \quad \underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٠ & ٣- \end{bmatrix} = \text{صفر} \cdot \underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١- & ٠ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \quad \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١- & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٠ & ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢- & ١- \\ ١- & ٣ \end{bmatrix}$$

ملحوظة (٢ – ٣)

بما أن القواعد العامة لحل المعادلات في النظام العددي ح قائمة هنا ، لذا يمكن حل هذا المثال بسرعة على النحو التالي :

$$٣-\underline{\text{س}} + ٣ \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١- \end{bmatrix} = ٤-\underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١- & ٠ \end{bmatrix}$$

$$٤\underline{\text{س}} \; ٣-\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١- & ٠ \end{bmatrix} ٣- \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١- \end{bmatrix}$$

$$\therefore \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١- & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣- & ٣- \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢- & ١- \\ ١- & ٣ \end{bmatrix}$$

تمارين (٢-٢)

(١) قم بالعمليات التالية إن أمكن ، مع ذكر السبب في حالة تعذر إجراء العملية :

(أ) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{هـ} & \text{و} & \text{ى} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(هـ) $\begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\text{س} & -\text{ص} \\ -\text{ع} & -\text{ل} \end{bmatrix}$

(و) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

(ز) $\begin{bmatrix} 8 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(ح) $\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \end{bmatrix}$

(ط) $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$

(ى) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$

(٢) إذا علمت أن

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} ، \quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} ، \quad \underline{جـ} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

فاحسب :

(أ) أ + ب وكذلك ب + أ وتحقق أنهما متساويتان .

(ب) (أ + ب) + جـ وكذلك أ + (ب + جـ) وتحقق أنهما متساويتان .

(جـ) أ − ب وكذلك ب − أ . هل توجد علاقة بينهما، وما هي إن وجدت ؟

(د) (أ − ب) + جـ وكذلك أ − (ب + جـ) وهل توجد علاقة بينهما أم لا ؟ .

(٣) إذا كانت أ كما في التمرين رقم (٢) فأوجد المصفوفة ك أ عندما تكون

(أ) ك = ٢ (ب) ك = −١ (جـ) ك = ٠

(د) ك = $\frac{٢}{٥}$ (هـ) ك = ١

(٤) إذا كانت :

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} ، \quad ب = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} ، \quad \underline{جـ} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

فعبر عن كل مما يأتي كمصفوفة :

(أ) ٢ أ + ب − جـ

(ب) ٣ أ + ٢ ب − ٤ جـ

(جـ) ٢ (أ + ٢ جـ) −٣ جـ

(د) ٢ (أ + ب + جـ)

(هـ) أ − (ب + جـ)

(و) ٣ (أ − ب) + جـ

(٥) باستعمال المصفوفات أ ، ب ، جـ الواردة في التمرين رقم (٤) حل كلاً من المعادلات المصفوفية الآتية :

(أ) أ + س = ب + جـ

(ب) أ + ٢ س = ب − جـ

(جـ) ٢ (ب − س) = ٢ (س − جـ) − ب

(د) $\frac{1}{2}$ (أ + س) = ٣ س + ٢ ب .

(٦) بفرض أن س ، ص مصفوفتان م × ن ، برهن على أن :

(أ) − (س + ص) = − س − ص

(ب) − (− س) = س .

(٢ − ٤) ضرب المصفوفات :

سنوضح طريقة إيجاد حاصل ضرب مصفوفة بمصفوفة أخرى من خلال الأمثلة الآتية :

(١) إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٥ \\ ٤ \\ -١ \end{bmatrix}$

فإن حاصل ضرب س في ص يعرف كما يلي :

س ص = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ٥ \\ ٤ \\ -١ \end{bmatrix}$

= [١ × ٥ + ٢ × ٤ + ٣ × (−١)]

حيث يتم ضرب عنصر من س في العنصر الواقع في نهاية السهم في المصفوفة ص ومن ثم نجمع النتائج فيكون :

س . ص = [٥ + ٨ − ٣]

= [١٠]

(٢) إذا كانت $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٢ & -٥ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$

فإن $\underline{\text{س}}\ \underline{\text{ص}}$ يعرف كما يلي :

$$\underline{\text{س}} \cdot \underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ٢ & -٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ \times ٣ + (-٥) \times ٤ & ٢ \times (-١) + (-٥) \times ٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -١٤ & -٢ \end{bmatrix}$$

(٣) إذا كانت :

$$\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٢ & ٠ & ١ \end{bmatrix} \text{ ، } \underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٠ \\ ١ \end{bmatrix}$$

فإن $\underline{\text{س}} \cdot \underline{\text{ص}}$ يعرف كما يلي :

$$\underline{\text{س}} \cdot \underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٢ & ٠ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ \\ ٠ \\ ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ \times (-١) + (-١) \times ٠ + ٣ \times ١ \\ ٢ \times (-١) + ٠ \times ٠ + ١ \times ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ -١ \end{bmatrix}$$

(٤) إذا كانت $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ ١ & -١ & ٣ \end{bmatrix}$ $\underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$

فإن $\underline{\text{س}} \cdot \underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ٢ \times ١ + ٠ \times ٥ + ١ \times (-١) & ٢ \times ٣ + ٠ \times ١ + ١ \times ٠ \\ ١ \times ١ + (-١) \times ٥ + ٣ \times (-١) & ١ \times ٣ + (-١) \times ١ + ٣ \times ٠ \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ -٧ & ٢ \end{bmatrix}$$

(٥) إذا كانت :

$$\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} \text{س}_{١١} & \text{س}_{٢١} \\ \text{س}_{١٢} & \text{س}_{٢٢} \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} \text{ص}_{١١} & \text{ص}_{٢١} & \text{ص}_{٣١} \\ \text{ص}_{١٢} & \text{ص}_{٢٢} & \text{ص}_{٣٢} \end{bmatrix}$$

فإن : $\underline{\text{س}} \cdot \underline{\text{ص}} =$

$$\begin{bmatrix} \text{س}_{١١}\text{ص}_{١١} + \text{س}_{٢١}\text{ص}_{١٢} & \text{س}_{١١}\text{ص}_{٢١} + \text{س}_{٢١}\text{ص}_{٢٢} & \text{س}_{١١}\text{ص}_{٣١} + \text{س}_{٢١}\text{ص}_{٣٢} \\ \text{س}_{١٢}\text{ص}_{١١} + \text{س}_{٢٢}\text{ص}_{١٢} & \text{س}_{١٢}\text{ص}_{٢١} + \text{س}_{٢٢}\text{ص}_{٢٢} & \text{س}_{١٢}\text{ص}_{٣١} + \text{س}_{٢٢}\text{ص}_{٣٢} \end{bmatrix}$$

وبوضع $\underline{\text{س}} \cdot \underline{\text{ص}} = \underline{\text{ع}} = [\text{ع}_{\text{ى هـ}}]$ فمن تعريف تساوي مصفوفتين نجد أن :

$$\text{ع}_{١١} = \text{س}_{١١}\text{ص}_{١١} + \text{س}_{٢١}\text{ص}_{١٢}$$

$$\text{ع}_{٢١} = \text{س}_{١١}\text{ص}_{٢١} + \text{س}_{٢١}\text{ص}_{٢٢} \quad ، \quad . \; . \; . \; . \; .$$

أكمل بنفسك باقي عناصر $\underline{\text{ع}}$

واختصاراً فإن $\text{ع}_{\text{ى هـ}}$ هو العدد الناتج من ضرب الصف ى من المصفوفة $\underline{\text{س}}$ بالعمود هـ من المصفوفة $\underline{\text{ص}}$ أي أن :

$$\text{ع}_{\text{ى هـ}} = \text{س}_{\text{ى}١}\,\text{ص}_{١\text{هـ}} + \text{س}_{\text{ى}٢}\,\text{ص}_{٢\text{هـ}}$$

حيث ى = ١ ، ٢ ، هـ = ١ ، ٢ ، ٣

من الأمثلة السابقة نلاحظ ونستنتج مايلي :

(١) إن عدد أعمدة المصفوفة $\underline{\text{س}}$ يساوي عدد صفوف المصفوفة $\underline{\text{ص}}$ في كل من الأمثلة الخمسة السابقة وجدير بالذكر أنه بصفة عامة لكي يكون حاصل ضرب مصفوفة $\underline{\text{س}}$ في أخرى $\underline{\text{ص}}$ ممكناً (معرفاً) فلا بد من أن يكون عدد أعمدة $\underline{\text{س}}$ يساوي عدد صفوف $\underline{\text{ص}}$

(٢) إذا كانت $\underline{\text{س}}$ من النوع م × ل ، $\underline{\text{ص}}$ من النوع ل × ن فإن حاصل ضربهما هو المصفوفة $\underline{\text{س}} \cdot \underline{\text{ص}}$ وتكون من النوع م × ن أي أن نوع المصفوفة $\underline{\text{س}} \cdot \underline{\text{ص}}$ يتحدد تماماً من عدد صفوف $\underline{\text{س}}$ وعدد أعمدة $\underline{\text{ص}}$.

(٣) إذا كانت س ، ص مصفوفتين مربعتين م × م فإن كلاً من س ص ، ص س مصفوفة مربعة م × م وبصفة خاصة إذا كانت س = ص فسنكتب س س بالصورة $س^{٢}$

أي أن : $س^{٢}$ = س . س .

مثال (٢ ٢ ١٢)

إذا كانت س = $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

فأوجد (إن أمكن) :

(أ) س . ص . (ب) ص . س (حـ) $س^{٢}$ (د) $ص^{٢}$.

الحل :

(أ) بما أن عدد أعمدة س يساوي عدد صفوف ص فإن س ص يمكن إيجادها وتكون :

$$س . ص = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -3 & 6 \\ 14 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

(ب) ص . س لايمكن إيجادها ، لأن عدد أعمدة ص لايساوي عدد صفوف س .

$$(حـ)\ س^{٢} = س . س = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & -21 \\ 28 & 13 \end{bmatrix}$$

(د) $\underline{ص}^{٢}$ = $\underline{ص}$. $\underline{ص}$ لايمكن إيجادهـا . (لماذا ؟)

مثال (٢ – ١٣)

باستخدام $\underline{س} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ص} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$

أثبت أن عملية ضرب المصفوفات غير إبدالية .

الحل :

$$\underline{س} . \underline{ص} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢١ & ٢٥ \\ ١٢ & ٢٠ \end{bmatrix} \qquad (٢ - ٥)$$

$$\underline{ص} . \underline{س} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ١٠ \\ ٩ & ٣٥ \end{bmatrix} \qquad (٢ - ٦)$$

من (٢ – ٥) ، (٢ – ٦) نجد أن $\underline{س} . \underline{ص} \neq \underline{ص} . \underline{س}$

ولعلك تلاحظ أن هذا يكفي للإثبات .

مثال (٢ – ١٤) :

أوجد حاصل الضرب $\underline{س}$ $\underline{ص}$ إذا كانت .

$\underline{س} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ص} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$

الحل :

$$\underline{س} \ \underline{ص} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

ملحوظة (٢ – ٤)

في المثال (٢ –١٤) يتبين أنه بالإمكان ضرب مصفوفتين غير صفريتين ليكون الناتج مصفوفة صفرية . وهذه الظاهرة مستحيلة في الأعداد الحقيقية ح كما ألفت ذلك من دراستك للرياضيات .

إن المثال الأخير والمثال الذي سبقه يبينان بعض أوجه الاختلاف لضرب المصفوفات عن الضرب في الأعداد الحقيقية وإن هذا يثير العديد من الأسئلة منها :

(١) هل يوجد عنصر محايد لعملية ضرب المصفوفات ؟

(٢) هل عملية الضرب تجميعية ؟ (٣) متى يوجد نظير ضربي لمصفوفة ؟

المثال التالي يوضح ، في حالة المصفوفات المربعة (من النوع ن × ن) ، أن مصفوفة الوحدة $\underline{م}_{ن}$ هي عنصر محايد بالنسبة لعملية الضرب . أما إجابة السؤال الثاني فهي بالإيجاب أي أن : $(\underline{س} \cdot \underline{ص})\, \underline{ع} = \underline{س} \cdot (\underline{ص} \cdot \underline{ع})$.

انظر إلى التمرين (٥ – هـ) من التمارين (٢ – ٣) لكي تتحقق من هذه المساواة بنفسك في حالة المصفوفات المعطاة في التمرين ، وحيث إن هذا التمرين هو مثال عددي ، فإنه لايعتبر إثباتاً ، كما تعلم ، وإن إثبات كون عملية الضرب تجميعية ليس صعباً ولكنه طويل ومليئ بالرموز لذا فإننا لن نقدمه هنا . أما فيما يخص النظير الضربي لمصفوفة فإن البند القادم (٢ – ٥) سيتناول هذا الموضوع في حالة المصفوفات من النوع ٢ × ٢ .

مثال (٢ – ١٥) :

إذا كانت $\underline{س} = \begin{bmatrix} س_{١١} & س_{٢١} \\ س_{١٢} & س_{٢٢} \end{bmatrix}$ ، $\underline{م} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

فاثبت أن $\underline{س} \cdot \underline{م} = \underline{م} \cdot \underline{س} = \underline{س}$

ماذا تستنتج من ذلك ؟

الحل :

$$\underline{س} \cdot \underline{م} = \begin{bmatrix} س_{11} & س_{21} \\ س_{12} & س_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} س_{11} \times 1 + س_{21} \times 0 & س_{11} \times 0 + س_{21} \times 1 \\ س_{12} \times 1 + س_{22} \times 0 & س_{12} \times 0 + س_{22} \times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} س_{11} & س_{21} \\ س_{12} & س_{22} \end{bmatrix}$$

$= \underline{س}$

بالمثل نجد أن : $\underline{م} \cdot \underline{س} = \underline{س}$

نستنتج أن $\underline{م} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ مصفوفة محايدة بالنسبة لعملية ضرب المصفوفات المربعة من النوع ٢ × ٢

تدريب (٢ ٧)

في المثال (٢ - ١٥) أثبت أن $\underline{م}\,\underline{س} = \underline{س}$

مثال (٢ ١٦) :

إذا علمت أن :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س_1 \\ س_2 \\ س_3 \end{bmatrix}$$

فأوجد كلاً من $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$.

الحل :

$س_1 = ١ \times ٤ + ٠ \times ٥ + (-١) \times (-٢) = ٦$

$س_2 = ٠ \times ٤ + (-٢) \times ٥ + ٣ \times (-٢) = -١٦$

$س_3 = ٢ \times ٤ + ١ \times ٥ + ٠ \times (-٢) = ١٣$

مثال (٢ ١٧) :

إذا علمت أن س مصفوفة من النوع ٢ × ٣ ، ص مصفوفة من النوع ٣ × ٢ فأوجد نوع كل من المصفوفات الآتية :

(أ) س ص (ب) ص س (حـ) (س ص) س (د) (ص س) ص

الحل :

(أ) س مصفوفة ٢ × ٣ ، ص مصفوفة ٣ × ٢ ⟸ س ص مصفوفة ٢ × ٢

(ب) ص مصفوفة ٣ × ٢ ، س مصفوفة ٢ × ٣ ⟸ ص س مصفوفة ٣ × ٣

(حـ) س ص مصفوفة ٢ × ٢ (من (أ)) ، س مصفوفة ٢ × ٣ ⟸ (س ص) س مصفوفة ٢ × ٣

(د) ص س مصفوفة ٣ × ٣ (من (ب)) ، ص مصفوفة ٣ × ٢ ⟸ (ص س) ص مصفوفة ٣ × ٢

مثال (٢ ١٨) :

إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ فأثبت أن

$س^٢ - ٣ س + ٢ م = ٠$

الحل :

$$\underline{\text{س}}^{٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٩ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$-٣\,\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} -٣ & -٩ \\ ٠ & -٦ \end{bmatrix} \quad ، \quad ٢\,\underline{\text{م}} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$$

إذن الطرف الأيمن $= \begin{bmatrix} ١ & ٩ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & -٩ \\ ٠ & -٦ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

$= \underline{٠} =$ الطرف الأيسر .

تمارين (٢-٣)

(١) إذا كانت $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ع}} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$ فأوجد :

(أ) $\underline{\text{س}}\ \underline{\text{ص}}$ (ب) $\underline{\text{س}}\ \underline{\text{ع}}$ (جـ) $\underline{\text{ص}}\ \underline{\text{ع}}$ (د) $\underline{\text{ص}}\ \underline{\text{س}}$

(هـ) $\underline{\text{ع}}\ \underline{\text{س}}$ (و) $\underline{\text{ع}}\ \underline{\text{ص}}$ (ز) $(\underline{\text{س}}\ \underline{\text{ص}})\ \underline{\text{ع}}$ (ح) $\underline{\text{س}}\ (\underline{\text{ص}}\ \underline{\text{ع}})$

(٢) إذا كانت $\underline{\text{س}}$ ، $\underline{\text{ص}}$ ، $\underline{\text{ع}}$ كما في التمرين (١) السابق وكانت $\underline{\text{م}}_{٢}$ هي مصفوفة الوحدة فإثبت أن

(أ) $\underline{\text{س}}\ \underline{\text{ص}} = -(\underline{\text{ص}}\ \underline{\text{س}})$ (ب) $\underline{\text{س}}^{٢} = \underline{\text{ع}}^{٢} = \underline{\text{م}}_{٢}$ (جـ) $\underline{\text{ص}}^{٢} = -\underline{\text{م}}_{٢}$

(د) $(\underline{\text{س}}\ \underline{\text{ص}})\ \underline{\text{ع}} = \underline{\text{س}}\ (\underline{\text{ص}}\ \underline{\text{ع}})$ خاصية التجميع .

(٣) إذا كانت أ مصفوفة ٢ × ٣ ، ب مصفوفة ٣ × ٣ ، جـ مصفوفة ٤ × ٣ ، د مصفوفة ٣ × ٢ . فأوجد نوع كل من المصفوفات الآتية :

(أ) أ ب　　(ب) د أ　　(جـ) أ د　　(د) جـ ب

(هـ) ب د　　(و) د (أ ب)　　(ز) (جـ ب) (د أ)

(٤) أجر عملية الضرب فيما يأتي ، إن أمكن ، واذكر السبب في حالة تعذر إجراء عملية الضرب :

(أ) $\begin{bmatrix} -٢ & ١ & ٦ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٥ \\ ٠ \\ ٣ \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} -٣ \\ ١ \\ ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٥ \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٨ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \\ ٤ \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ٠ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٠ & ٤ \\ ١ & ١ & ١ \end{bmatrix}$

(هـ) $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٠ & ٣ \\ ٢ & -١ & ١ & ٠ \end{bmatrix}$

(و) $\begin{bmatrix} -١ & ٣ & ٢ \\ ٥ & ٣ & ٦ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٩ & ١ & ٠ \\ ٢ & -٤ & ٥ \end{bmatrix}$

(ز) $\begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٤ \\ -٣ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$

(ح) $\begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٤ \\ -٣ & ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \end{bmatrix}$

(٥) إذا كانت $\underline{س} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، $\underline{ص} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\underline{ع} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

فبيّن صحة أو خطأ كلٍ من العبارات الآتية مع ذكر السبب :

(أ) $\underline{س}\ (\underline{ص} + \underline{ع}) = \underline{س}\,\underline{ص} + \underline{س}\,\underline{ع}$

(ب) $(\underline{ص} + \underline{ع})\ \underline{س} = \underline{ص}\,\underline{س} + \underline{س}\,\underline{ع}$

(جـ) $\underline{س}\ (\underline{ص} + \underline{ع}) = \underline{س}\,\underline{ص} + \underline{ع}\,\underline{س}$

(د) $\underline{س}\ (\underline{ص} + \underline{ع}) = \underline{ص}\,\underline{س} + \underline{ع}\,\underline{س}$

(هـ) $(\underline{س}\ \underline{ص})\ \underline{ع} = \underline{س}\ (\underline{ص}\ \underline{ع})$

(٦) إذا كانت : $\underline{س} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، $\underline{ص} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

فاثبت أن :

(أ) $\underline{س}^2 - 2\underline{س} - 3\underline{م} = \underline{و}$

(ب) $\underline{ص}^2 - 2\underline{ص} + 2\underline{م} = \underline{و}$

(جـ) $\underline{س}\,\underline{ص} \neq \underline{ص}\,\underline{س}$.

(٧) إذا كانت : $\underline{س} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\underline{ص} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

فاثبت أن .

$\underline{س}\ \underline{ص} = \underline{ص}\ \underline{س} = \underline{م}$

هل $\underline{س}$ ، $\underline{ص}$ كل منهما نظير ضربي للأخرى ؟ ولماذا ؟ .

(٨) إذا كانت : $\underline{س} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ -ب & أ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ص} = \begin{bmatrix} جـ & د \\ -د & جـ \end{bmatrix}$

فاثبت أن :

(أ) $\underline{س}\ \underline{ص} = \underline{ص}\ \underline{س}$. (ب) $\underline{س}\ \underline{ص} = أ\ \underline{ص}$ عندما يكون ب = ٠

(٢ – ٥) النظير الضربي لمصفوفة :

سنكتفي في هذا البند بدراسة النظير الضربي لمصفوفة مربعة من النوع ٢ × ٢ وسنجيب على الأسئلة الآتية : متى يوجد نظير ضربي ؟ هل هو وحيد ؟ وكيف نحصل عليه ؟

نبدأ بتعريف النظير الضربي :

تعريف (٢ – ٧) :

النظير الضربي لمصفوفة أ من النوع ٢ × ٢ إن وجد ، هو مصفوفة ب من النوع نفسه ، بحيث يكون : أ . ب = ب . أ = م ، و حيث م هي المصفوفة المحايدة بالنسبة لعملية الضرب (أي مصفوفة الوحدة من النوع ٢ × ٢) .

سنرمز للنظير الضربي لمصفوفة أ بالرمز $أ^{-١}$ (أي أن ب = $أ^{-١}$ في التعريف ٢ – ٧)

لأجل الإجابة على السؤال متى يوجد نظير ضربي لمصفوفة مربعة ؟ نعمد إلى تقديم تعريف المحددة وهي فكرة مهمة جداً في موضوعنا هذا ، فنبدأ بتعريف المحددة لمصفوفة من النوع ٢ × ٢

تعريف (٢ – ٨) :

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} أ & ب \\ حـ & د \end{bmatrix}$ فإن محددة المصفوفة أ ويرمز لها بالرمز :

$\begin{vmatrix} أ & ب \\ حـ & د \end{vmatrix}$ هي المقدار : أ د – ب حـ .

في بعض الأحيان يستعمل الرمز △ (ويقرأ دلتا) للدلالة على المحددة $\begin{vmatrix} أ & ب \\ حـ & د \end{vmatrix}$ ،

ومن السهل أن تلاحظ أن المقدار أ د – ب حـ هو حاصل ضرب العنصرين الواقعين . في القطر الأساسي للمصفوفة أ مطروحاً منه حاصل ضرب العنصرين الواقعين في القطر الآخر . كما نرجو الانتباه هنا إلى أن الخطين : | | لايرمزان إلى القيمة المطلقة .

مثال (٢ ـ ١٩) .

إذا كان $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & -\frac{٣}{٢} \end{bmatrix}$

فأوجد : (أ) محددة $\underline{أ}$ ، (ب) محددة $\underline{ب}$ (حـ) $\underline{أ}\ \underline{ب}$ ، (د) $\underline{ب}\ \underline{أ}$

ماذا تستنتج من الفقرتين (حـ) ، (د) ؟

الحل :

(أ) محددة $\underline{أ} = \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ٣ \times ٢ - ٢ \times ٤ = -٢$

(ب) محددة $\underline{ب} = \begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & -\frac{٣}{٢} \end{vmatrix} = (-١) \times (-\frac{٣}{٢}) - ٢ \times ١ = -\frac{١}{٢}$

(حـ) $\underline{أ} \cdot \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & -\frac{٣}{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

(د) $\underline{ب} \cdot \underline{أ} = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & -\frac{٣}{٢} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

تستنتج من الفقرتين (حـ) ، (د) أن كلاً من $\underline{أ}$ و $\underline{ب}$ نظير ضربي للأخرى ، أي أن :

$\underline{أ}^{-١} = \underline{ب}$ ، $\underline{ب}^{-١} = \underline{أ}$ وذلك وفق التعريف (١ – ٧) . النظرية القادمة تعطينا طريقة لإيجاد النظير الضربي لمصفوفة في حالة وجوده .

نظرية (٢ - ١) :

إذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{د} \end{bmatrix}$ فإن النظير الضربي للمصفوفة $\underline{\text{أ}}$ يكون موجوداً عندما تكون محددة $\underline{\text{أ}} = \Delta \neq$ صفراً وعندئذ فإن :

$$\underline{\text{أ}}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{حـ} & \text{أ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\text{د}}{\Delta} & \frac{-\text{ب}}{\Delta} \\ \frac{-\text{حـ}}{\Delta} & \frac{\text{أ}}{\Delta} \end{bmatrix}$$

البرهان

لنفرض أن $\underline{\text{ب}} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{حـ} & \text{أ} \end{bmatrix}$ ، حيث Δ = محددة $\underline{\text{أ}}$ = أ د - ب حـ .

فيكون $\underline{\text{أ}} \cdot \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{د} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{حـ} & \text{أ} \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \text{أ د} - \text{ب حـ} & -\text{أ ب} + \text{أ ب} \\ \text{حـ د} - \text{حـ د} & -\text{حـ ب} + \text{د أ} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\text{م}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

وبالمثل

$$\underline{\text{ب}}\ \underline{\text{أ}} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{حـ} & \text{أ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{د} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{١}{\Delta}\begin{bmatrix} \text{أ د} - \text{ب جـ} & \text{د ب} - \text{د ب} \\ -\text{جـ أ} + \text{جـ أ} & -\text{جـ ب} + \text{أ د} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{١}{\Delta}\begin{bmatrix} \Delta & ٠ \\ ٠ & \Delta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\text{م}} \quad \cdots\cdots \quad (٢)$$

من (١) ، (٢) ينتج أن $\underline{\text{ب}}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{\text{أ}}$ ، أي أن :

$$\underline{\text{أ}}^{-١} = \underline{\text{ب}} = \frac{١}{\Delta}\begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\text{د}}{\Delta} & \frac{-\text{ب}}{\Delta} \\ \frac{-\text{جـ}}{\Delta} & \frac{\text{أ}}{\Delta} \end{bmatrix}$$

وأن $\underline{\text{أ}}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{\text{ب}}$ (لماذا ؟)

ملحوظة (٢ – ٥)

من أجل الحصول على النظير الضربي لمصفوفة $\underline{\text{أ}}$ نتبع الخطوات الآتية :

(١) نوجد Δ = محددة $\underline{\text{أ}}$ فإن كانت صفراً نتوقف ونقول إنه لايوجد نظير ضربي للمصفوفة $\underline{\text{أ}}$.

وإذا كانت محددة $\underline{\text{أ}}$ $\neq$ صفراً فإنه حسب النظرية (٢ – ١) يوجد نظير ضربي للمصفوفة $\underline{\text{أ}}$ وعندئذ نتحول إلى الخطوة التالية :

(٢) نبادل بين وضعي العنصرين الواقعين على القطر الأساسي للمصفوفة $\underline{\text{أ}}$.

(٣) نغير إشارة كل من العنصرين الواقعين على القطر الآخر للمصفوفة .

(٤) نضرب المصفوفة الناتجة من إجراء (٢) ، (٣) بالعدد $\frac{١}{\Delta}$ فنحصل على $\underline{\text{أ}}^{-١}$

تدريب (٢ - ٨)

طبق الطريقة الواردة في الملحوظة (٢ - ٥) لإثبات أن كلا من $\underline{أ}$ وَ $\underline{ب}$ الواردتين في المثال (٢ - ١٩) هو النظير الضربي للآخر .

مثال (٢ - ٢٠) :

إذا كانت : $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٧ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} س & ٠ \\ ٠ & ص \end{bmatrix}$

حيث : س ص $\neq$ ٠ . فأثبت أنه لكل من $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ ، $\underline{أ}$ ٠ $\underline{ب}$ نظير ضربي وأوجده .

الحل :

نطبق الخطوات الواردة في الملحوظة (٢ - ٥) .

بالنسبة للمصفوفة $\underline{أ}$

(١) محددة $\underline{أ} = \begin{vmatrix} ٧ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} = -٧ \neq$ صفراً

إذن للمصفوفة $\underline{أ}$ نظير ضربي

الخطوتان (٢) ، (٣) من الملحوظة تعطينا المصفوفة .

$$\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix}$$

الخطوة (٤) تعطينا . $\frac{١}{-٧} \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٧} & ٠ \\ \frac{٢}{٧} & -١ \end{bmatrix} = \underline{أ}^{-١}$

بالنسبة للمصفوفة $\underline{ب}$ فباختصار نلاحظ أن محددة ب = س ص $\neq$ صفراً من الفرض

فيكون النظير الضربي للمصفوفة $\underline{ب}$ هو :

$$\underline{ب}^{-١} = \frac{١}{س ص} \begin{bmatrix} ص & ٠ \\ ٠ & س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{س} & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{ص} \end{bmatrix}$$

إن هذا يعني أنه إذا كانت ب مصفوفة قطرية عناصرها مغايرة للصفر فإن نظيرها الضربي مصفوفة قطرية أيضا ، وعناصر قطرها هي مقلوبات عناصر القطر في ب .

بالنسبة للمصفوفة أ ، ب .

$$\text{فإن } أ \cdot ب = \begin{bmatrix} ٧ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س & ٠ \\ ٠ & ص \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٧س & ٠ \\ ٢س & -ص \end{bmatrix}$$

محددة المصفوفة أ ب هي − ٧ س ص

باتباع خطوات إيجاد النظير للمصفوفة أ . ب نجد أن :

$$(أ\ ب)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٧س} & ٠ \\ \frac{٢}{٧}\ \frac{١}{ص} & -\frac{١}{ص} \end{bmatrix}$$

تدريب (٢ − ٩)

في المثـــــال (٢ − ٢٠) :

١ − هل صحيح أن : $(أ\ ب)^{-1} = أ^{-1}\ ب^{-1}$.

إذا لم يكن كذلك فما هو الشرط على س ، ص كي يكون هذا صحيحاً ؟

٢ − هل صحيح أن : $(أ\ ب)^{-1} = ب^{-1}\ أ^{-1}$ ؟

٣ − تحقق أن : $(أ\ ب)\ (أ\ ب)^{-1} = م = (أ\ ب)^{-1}\ (أ \cdot ب)$

ملحوظة (٢ − ٦)

في المثال (٢ − ٢٠) لعلك تلاحظ أن :

محددة أ × محددة ب = محددة أ ب (تحقق من ذلك) إن برهان هذه الحقيقة في

حالة المصفوفات من النوع ٢ × ٢ أمر يسير نتركه للطالب في التمرين (٨) من التمارين العامة ، لكن الذي يهمنا هنا هو بيان ما يمكن أن نستنتجه من هذه الحقيقة .

لنفرض أنه يوجد نظير ضربي للمصفوفة $\underline{أ}$ التي هي من النوع ٢ × ٢ فيكون :

$\underline{أ} \times \underline{أ}^{-1} = \underline{م}$ ومنه نجد أن : محددة $\underline{أ}$ × محددة $\underline{أ}^{-1}$ = محددة $(\underline{أ}\ \underline{أ}^{-1})$

= محددة $\underline{م}$ = ١

فينتج أن : محددة $\underline{أ}^{-1}$ = $\dfrac{١}{\text{محددة } \underline{أ}}$

كذلك نستنتج أنه إذا وجد نظير ضربي لمصفوفة $\underline{أ}$ فإن محددة $\underline{أ} \neq$ ٠ وهو عكس الشرط الموضوع . في النظرية (٢ – ١) .

مثال (٢ – ٢١) .

أي من المصفوفات الآتية لها نظير ضربي ؟ أوجده في حالة الإيجاب .

(أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ١٠ & ٢- \\ ٥ & ١- \end{bmatrix}$

(ح) $\begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ١٠ & ٦ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$

الحل :

(أ) المحددة = Δ = $\begin{vmatrix} ٠ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٨ $\neq$ صفر

إذن لهذه المصفوفة نظير ضربي هو :

$$\begin{bmatrix} ٠ & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٤} & -\frac{٣}{٨} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix} \frac{١}{٨}$$

(ب) المحددة $= \Delta = \begin{vmatrix} -2 & 10 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$

$= (-2) \times 5 - (10 \times -1)$

$= -10 + 10 =$ صفر

إذن ليس للمصفوفة نظير ضربي .

(حـ) المحددة $= \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq$ صفر

إذن لهذه المصفوفة نظير ضربي هو :

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(د) المحددة $= \Delta = \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$

$= 6 \times 5 - 3 \times 10 =$ صفر

إذن ليس لهذه المصفوفة نظير ضربي .

مثال (٢ ‐ ٢٢) :

احسب قيم س التي تجعل المصفوفة الآتية ليس لها نظير ضربي .

$$\begin{bmatrix} س-2 & س \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل :

ليس للمصفوفة أعلاه نظير ضربي عندما تكون محددتها = صفراً

$\begin{vmatrix} س-2 & س \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\,(س - 2) - 3\,س$

= ٢ س − ٢ س − ٤

= − س − ٤ = ٠

إذن س = − ٤ . أي عند هذه القيمة لايوجد نظير ضربي للمصفوفة المعطاة .

تدريب (٢ − ١٠)

احسب قيم س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} \text{س} & \text{٤} \\ \text{٩} & \text{س} \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي

تـمـارين (٢-٤)

(١) أوجد النظير الضربي لكل من المصفوفات الآتية إن أمكن ذلك :

(أ) $\begin{bmatrix} \text{٤} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{٢} \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} \text{-٣} & \text{٩} \\ \text{٢} & \text{-٦} \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} \text{٣} & \text{٢} \\ \text{٣} & \text{٢} \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} \text{١} & \text{٢} \\ \text{٣} & \text{٤} \end{bmatrix}$

(هـ) $\begin{bmatrix} \text{-١} & \text{٢} \\ \text{٠} & \text{٤} \end{bmatrix}$ (و) $\begin{bmatrix} \text{٣} & \text{٦} \\ \text{-١} & \text{٢} \end{bmatrix}$

(ز) $\begin{bmatrix} \text{٢} & \text{-١} \\ \text{-١} & \text{١} \end{bmatrix}$ (ح) $\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{ب} \end{bmatrix}$ علماً بأن أ $\neq$ ب .

(٢) أحسب قيم س التي تجعل كلاً من المصفوفات الآتية ليس لها نظير ضربي

(أ) $\begin{bmatrix} \text{س} & \text{٢} \\ \text{٦} & \text{٣} \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} \text{س} & \text{٩} \\ \text{٤} & \text{س} \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} \text{س} & \text{٤} \\ \text{٢} & \text{س - ٢} \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} \text{س - ١} & \text{٢} \\ \text{١} & \text{س - ٢} \end{bmatrix}$

(٣) إذا كانت س = $\begin{bmatrix} -١٢ & ٣ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$

فاثبت أن س$^{-1}$ = $\begin{bmatrix} ١ & \frac{١}{٣} \\ \frac{١}{٤} & ٠ \end{bmatrix}$

(٤) إذا كانت ص = $\begin{bmatrix} -أب & أ \\ ب & ٠ \end{bmatrix}$

فاثبت أن ص$^{-1}$ = $\begin{bmatrix} ١ & \frac{١}{أ} \\ \frac{١}{ب} & ٠ \end{bmatrix}$ علماً بأن أ ب ≠ ٠

(٥) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} س & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، فاثبت أن أ$^{-1}$ = أ

(٦) إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٨ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٣ & ٨ \end{bmatrix}$

فأجب عما يلي :

(أ) احسب كلاً من س$^{-1}$ ، ص$^{-1}$

(ب) أوجد س$^{-1}$ ص$^{-1}$ وكذلك ص$^{-1}$ س$^{-1}$

(حـ) أوجد س . ص ومن ثم أوجد (س ص)$^{-1}$

(د) أوجد ص . س ومن ثم تحقق أن س . ص ≠ ص . س

(هـ) أثبت أن (س ص)$^{-1}$ ≠ س$^{-1}$ ص$^{-1}$ ، مستفيداً من الفقرتين (ب) ، (حـ)

(و) أثبت أن (س ص)$^{-1}$ = ص$^{-1}$ س$^{-1}$ ، مستفيداً من الفقرتين (ب) ، (حـ)

(٧) إذا كان لـ س نظير ضربي ، فبرهن على أن س هي النظير الضربي للمصفوفة س$^{-1}$

أي أن (س$^{-1}$)$^{-1}$ = س

٢ – ٦ بعض التطبيقات البسيطة على المصفوفات :

أولاً : حل نظام معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

إذا أعطينا نظام المعادلتين :

$$\begin{cases} \text{م س + ب ص = ل ،} \\ \text{حـ س + د ص = ك} \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad (\text{٢ – ٧})$$

فإنه يمكن كتابتها بالصيغة المصفوفية التالية

$$\begin{bmatrix} \text{م} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{د} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ل} \\ \text{ك} \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (\text{٢ – ٨})$$

وإذا فرضنا

$$\underline{\text{م}} = \begin{bmatrix} \text{م} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{د} \end{bmatrix} ، \quad \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} ، \quad \underline{\text{حـ}} = \begin{bmatrix} \text{ل} \\ \text{ك} \end{bmatrix}$$

فإنه يمكن كتابة المعادلتين في (٢ – ٧) بمعادلة مصفوفية واحدة على الهيئة :

$$\underline{\text{م}}\ \underline{\text{س}} = \underline{\text{حـ}} \qquad (\text{٢ – ٩})$$

تسمى المصفوفة $\underline{\text{م}}$ مصفوفة المعاملات ، $\underline{\text{س}}$ مصفوفة المجاهيل ، $\underline{\text{حـ}}$ مصفوفة الثوابت

إذا كانت محددة $\underline{\text{م}} \neq$ صفراً ، أي $\triangle$ = م د – ب حـ $\neq$ ٠

فمن الممكن إيجاد حل للمعادلة (٢ – ٩) كما يلي :

$\underline{\text{م}}^{-1}$ ($\underline{\text{م}}$ $\underline{\text{س}}$) = $\underline{\text{م}}^{-1}$ $\underline{\text{حـ}}$ بضرب طرفي المعادلة (٢ – ٩) من اليمين في $\underline{\text{م}}^{-1}$

$\Longleftarrow$ ($\underline{\text{م}}^{-1}$ $\underline{\text{م}}$) $\underline{\text{س}}$ = $\underline{\text{م}}^{-1}$ $\underline{\text{حـ}}$ ، خاصة التجميع .

$\Longleftarrow$ $\underline{\text{م}}$ $\underline{\text{س}}$ = $\underline{\text{م}}^{-1}$ $\underline{\text{حـ}}$ من تعريف نظير $\underline{\text{م}}$

$\Longleftarrow$ $\underline{\text{س}}$ = $\underline{\text{م}}^{-1}$ $\underline{\text{حـ}}$ لأن $\underline{\text{م}}$ عنصر محايد

وواضح أن بمقدورنا الآن إيجاد المجهولين س ، ص (اللذين يشكلان حل نظام المعادلتين الأصليتين) بدلالة الثوابت العددية م ، ب ، حـ ، د ، ل ، ك

ملحوظة (٢ – ٧)

إشارة إلى الملحوظة (٢ – ٤) الواردة في البند (٢ – ٤) نود الملاحظة أن طريقة تعريف ضرب المصفوفات بالأسلوب المذكور في البند (٢ – ٤) مكنتنا من تحويل نظام المعادلتين (٢ – ٧) ، إلى الصيغة المصفوفية (٢ – ٨) وهو أمر يجعل للمصفوفات أهمية كبيرة في حل أنظمة المعادلات الخطية .

مثال (٢ – ٢٣) :

حل نظام المعادلتين الآتيتين باستخدام المصفوفات وتحقق من الناتج :

٤ س + ٥ ص = ١ ، ٣ س + ٦ ص = ٢

الحل :

نكتب المعادلة المصفوفية $\underline{أ}\ \underline{س} = \underline{جـ}$ ، حيث

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix} ، \quad \underline{س} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} ، \quad \underline{جـ} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$$

$$\text{محددة } \underline{أ} = \Delta = \begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix} = ٩$$

إذن يوجد نظير ضربي لـ $\underline{أ}$ ويكون الحل :

$$\underline{س} = \underline{أ}^{-١}\ \underline{جـ}$$

$$= \frac{١}{٩} \begin{bmatrix} ٦ & -٥ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$$

$$= \frac{١}{٩} \begin{bmatrix} -٤ \\ ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{٤}{٩} \\ \frac{٥}{٩} \end{bmatrix}$$

أي أن $س = -\frac{٤}{٩}$ ، $ص = \frac{٥}{٩}$ هو الحـــل .

التحقيق :

بالتعويض المباشر في المعادلتين أعلاه بقيمتي س ، ص نجد أن :

$$٤ \times (\frac{-٤}{٩}) + ٥ \times \frac{٥}{٩} = \frac{٩}{٩} = ١$$

$$٣ \times (\frac{-٤}{٩}) + ٦ \times \frac{٥}{٩} = \frac{١٨}{٩} = ٢$$

مثال (٢ ـ ٢٤) :

حل نظام المعادلتين الآتيتين مستخدماً المصفوفات

-٢ س + ٣ ص + ١ = ... (٢ – ١٠)

٥ ص = س + ٧ .... (٢ – ١١)

الحل :

نكتب المعادلتين (٢ – ١٠) و (٢ – ١١) على الصورة التالية :

-٢ س + ٣ ص = -١ ، $-$ س + ٥ ص = ٧

فتكون المعادلة المصفوفية هي $\underline{أ}\ \underline{س} = \underline{ج}$ ، حيث :

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix} ، \underline{س} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} ، \underline{ج} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٧ \end{bmatrix}$$

$$\text{محددة } \underline{أ} = \Delta = \begin{vmatrix} -٢ & ٣ \\ -١ & ٥ \end{vmatrix} = -٧ \neq ٠ .$$

$\Longleftarrow$ يوجد نظير ضربي لـ $\underline{أ}$

إذن . $\underline{س} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \underline{أ}^{-١}\ \underline{ج}$

$$= \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} -26 \\ -15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{26}{7} \\ \frac{15}{7} \end{bmatrix}$$

أي أن : س = $\frac{26}{7}$ ، ص = $\frac{15}{7}$

ثانياً : تطبيقات متنوعة .

مثال (٢ – ٢٥) :

تعهد مقاول أن يبني منازل وفق نموذجين ﺃ ، ب في كل من الرياض ومكة المكرمة وجدة ،

فإذا تمكن في العام الأول من بناء :

١٣ منزلاً في الرياض من النموذج ﺃ ،

٢٠ منزلاً في الرياض من النموذج ب ،

١٨ منزلاً في مكة المكرمة من النموذج ﺃ ،

١١ منزلاً في مكة المكرمة من النموذج ب ،

١٦ منزلاً في جدة من النموذج ﺃ ،

١٢ منزلاً في جدة من النموذج ب ،

وتمكن في العام الثاني من بناء أربعة أمثال ما بناه من كل نموذج في كل مدينة . فالمطلوب :

(ﺃ) تمثيل ما بناه في العام الأول في مصفوفة .

(ب) تمثيل ما بناه في العام الثاني بمصفوفة .

(حـ) تمثيل ما بناه في العامين معاً بمصفوفة .

(د) إذا كان المنزل الواحد من النموذج ٲ يكلف س ريالاً .

بينما يكلف المنزل الواحد من النموذج ب ، ص ريالاً ، فاكتب مصفوفة تمثل مجموع التكاليف الكلية لكل نموذج على حدة في كل مدينة .

الحل :

(ٲ) يمكن أن نوجز المعلومات في مصفوفة ٲ من النوع ٣ × ٢ ، بحيث يمثل الصف الأول منها عدد المنازل في الرياض والصف الثاني عدد المنازل في مكة المكرمة والصف الثالث عدد المنازل في جدة . بينما يمثل العمود الأول من ٲ عدد المنازل من النموذج ٲ ، والعمود الثاني عدد المنازل من النموذج ب وبذلك نكتب .

$$\underline{ٲ} = \begin{bmatrix} ١٣ & ٢٠ \\ ١٨ & ١١ \\ ١٦ & ١٢ \end{bmatrix}$$

(ب) المصفوفة المطلوبة = ٤ $\underline{ٲ}$

(حـ) المصفوفة المطلوبة = $\underline{ٲ}$ + ٤ $\underline{ٲ}$

= ٥ $\underline{ٲ}$

(د) المصفوفة المطلوبة = ٥ $\underline{ٲ}$ $\underline{س}$ وذلك بفرض أن $\underline{س}$ = $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$ **مصفوفة التكلفة**

ونترك للطالب كتابة المصفوفات في (ب) ، (حـ) ، (د) بشكل تفصيلي

مثال (٢ ـ ٢٦) :

خمسة طلاب ٲ ، ب ، حـ ، د ، هـ كانت درجاتهم على الترتيب كما يلي :

في الرياضيات = ٥٦ ، ٤٥ ، ٥٥ ، ٦٣ ، ٧٠

في الفيزياء = ٥٠ ، ٦٠ ، ٦٥ ، ٧٢ ، ٤٦

في الكيمياء = ٦٦ ، ٤٧ ، ٦٠ ، ٥٠ ، ٣٠

المطلـــوب :

(أ) تمثيل هذه المعلومات في مصفوفة ٣ × ٥

(ب) إذا كانت الدرجات السابقة محسوبة من ١٠٠ وكانت الدرجة اللازمة للنجاح في الرياضيات ٦٠ ، الفيزياء ٥٠ ، الكيمياء ٥٠ فكم طالباً رسب في الرياضيات ؟ وكم طالباً رسب في الفيزياء وكم طالباً رسب في الرياضيات والفيزياء معاً ؟ وكم طالباً رسب في الرياضيات والكيمياء معاً ؟ وكم طالباً رسب في الفيزياء والكيمياء؟ وكم طالباً رسب في المواد الثلاثة ؟ وكم طالباً نجح في المواد الثلاثة ؟

(حـ) إذا زيدت درجات الطلاب الخمسة بنسبة ١٠٪ في المواد الثلاثة فاكتب مصفوفة تمثل هذه الزيادة .

(د) اكتب مصفوفة تمثل درجاتهم بعد الزيادة ومنها حدد الطلاب الراسبين في كل مادة . وكم طالباً نجح في المواد الثلاث معاً .

الحل :

(أ) المصفوفة المطلوبة من النوع ٣ × ٥ ، يعني أن المواد الثلاث تمثل على الترتيب بصفوف المصفوفة ، بينما الطلاب الخمسة يمثلون على الترتيب بأعمدة المصفوفة .

نفرض أن $\underline{س}$ هي المصفوفة المطلوبة ونكتب .

$$\underline{س} = \begin{bmatrix} ٥٦ & ٤٥ & ٥٥ & ٦٣ & ٧٠ \\ ٥٠ & ٦٠ & ٦٥ & ٧٢ & ٤٦ \\ ٦٦ & ٤٧ & ٦٠ & ٥٠ & ٣٠ \end{bmatrix}$$

(ب) من المصفوفة $\underline{س}$ يمكن معرفة المعلومات المطلوبة ونلخصها في الجدول الآتي :

المادة	ر	ف	ك	ر ، ف	ر ، ك	ف ، ك	المواد الثلاث
عدد الراسبين	٣	١	٢	٠	١	١	٠

حيث ر ترمز للرياضيات ، ف للفيزياء ، ك الكيمياء .

عدد الطلاب الناجحين في المواد الثلاث كلها = ١

(حـ) مصفوفة الزيادة = $\frac{١}{١٠}$ س

(د) المصفوفة التي تمثل درجات الطلاب بعد الزيادة هي :

$$س + \frac{١}{١٠} س = \begin{bmatrix} ٦١,٦ & ٤٩,٥ & ٦٠,٥ & ٦٩,٣ & ٧٧ \\ ٥٥ & ٦٦ & ٧١,٥ & ٧٩,٢ & ٥٠,٦ \\ ٧٢,٦ & ٥١,٧ & ٦٦ & ٥٥ & ٣٣ \end{bmatrix}$$

ومن هذه المصفوفة الجديدة نجد أن :

المادة	ر	ف	ك
الراسبون	١	صفر	١

عدد الطلاب الناجحين في المواد الثلاثة = ٣

تمارين (٢-٥)

(١) استخدم المصفوفات في إيجاد حل كل نظام من معادلات الدرجة الأولى الآتية :

(أ) س + ص = ١ ، ٢ س + ٣ ص = ٢

(ب) ٣ س + ٢ ص = ٥ ، ٢ س + ص = ٣

(حـ) ٥ ع − ٣ س = ٢٧ ، ٦ ع − ٢ س = ١٠

(د) ٤ س = − ٣ ص + ١ ، ص = ٣ − ٢ س

(هـ) أ س − ب ص = ب ، ب س − أ ص = أ ، حيث $أ^٢ \neq ب^٢$

(و) $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{١}{٣}$ ص = − ١ ، $\frac{١}{٣}$ س + $\frac{١}{٤}$ ص = ٧

(٢) تمتلك شركة صناعية ٣ مصانع لإنتاج جهاز ألكتروني يتكون من أربعة أجزاء مختلفة ﻫ ، ب ، ﺣ ، د فإذا كان المصنع الأول ينتج ٣٥ قطعة من ﻫ ، ٤٣ قطعة من ب ، ٣٧ قطعة من ﺣ ، ١٦ قطعة من د يومياً ، وكان المصنع الثاني ينتج ٢٥ قطعة من ﻫ ، ٣٦ قطعة من ب ، ٤١ قطعة من ﺣ ، ١٢ قطعة من د يومياً ، أما المصنع الثالث فينتج يومياً ٦٥ قطعة من ﻫ ، ٥٥ قطعة من ب ، ٧٥ قطعة من ﺣ ، ٤٠ قطعة من د ، فالمطلوب :

(ﻫ) وضع هذه المعلومات في مصفوفة من النوع ٤ × ٣

(ب) وضع هذه المعلومات في مصفوفة من النوع ٣ × ٤

(ﺣ) كتابة مصفوفة تمثل إنتاج المصانع الثلاثة لمدة ٣٠ يوماً

(د) إذا كانت الشركة تبيع كل قطعة من المصنع الأول بمبلغ $١٠^{٤}$ ريالاً وكل قطعة من المصنع الثاني بمبلغ $١٠^{٣}$ ريالاً وكل قطعة من المصنع الثالث بمبلغ $١٠^{٥}$ ريالاً ، فاكتب مصفوفة تمثل دخل الشركة اليومي من بيع القطع ﻫ ، ب ، ﺣ ، د في مصانعها الثلاثة معاً .

(٣) ثلاثة طلاب يتنافسون للحصول على درجات عالية في الفصل ، وقد اتفقوا كما يلي :

إذا تغلب ﻫ على ب فإن ب يشتري هدية لزميله ﻫ بمبلغ ١٠٠ ريال

وإذا تغلب ﻫ على ﺣ فإن ﺣ يشتري هدية لزميله ﻫ بمبلغ ٨٠ ريالاً

وإذا تغلب ب على ﻫ فإن ﻫ يشتري هدية لزميله ب بمبلغ ٩٠ ريالاً

وإذا تغلب ب على ﺣ فإن ﺣ يشتري لزميله ب هدية بمبلغ ٧٥ ريالاً

وإذا تغلب ﺣ على ﻫ فإن ﻫ يشتري هدية لزميله ﺣ بمبلغ ٨٠ ريالاً

وإذا تغلب ﺣ على ب فإن ب يشتري لزميله ﺣ هدية بمبلغ ٩٠ ريالاً

المطلوب :

تمثيل هذه المعلومات بمصفوفة ، بحيث يكون الفائز في مبدأ كل صف والخاسر في مقدمة كل عمود . وإذا رمزنا لهذه المصفوفة بالرمز $\underline{س} = [س_{ى هـ}]$ ، فماذا تساوي $س_{ى ى}$ ؟ وهل $س_{ى هـ} = س_{هـ ى}$ لجميع قيم ى ، هـ الممكنه ؟

(٤) يوجد ثلاثة طرق تؤدي من ٱ إلى ق وطريق واحد يؤدي من ب إلى ق ، وطريق واحد من حـ إلى ق . كما يوجد طريق واحد من ٱ إلى ك ، ويوجد طريق واحد من ب إلى ك ، وهناك ثلاثة طرق من حـ إلى ك والمطلوب :

(ٱ) عبر عن المعلومات بمصفوفة ، صفوفها الأماكن ٱ ، ب ، حـ وأعمدتها ق ، ك .

(ب) إذا وجدت ثلاثة طرق من ق إلى س وطريقان من ق إلى ص وأربعة طرق من ق إلى ع ، وطريق واحد من ك إلى س وطريق واحد من ك إلى ص وأربعة طرق من ك إلى ع . فعبر عن هذه المعلومات بمصفوفة صفاها ق ، ك وأعمدتها س ، ص ، ع .

(حـ) اضرب المصفوفة المذكورة في (ٱ) بالمصفوفة المذكورة في (ب) .

(د) ماهي المعلومات المعطاة بعناصر المصفوفة المذكورة في (حـ) ؟

٢ - ٧ استخدام المحددات من الدرجتين الثانية والثالثة في حل أنظمة المعادلات الخطية .

أولاً : استخدام محددات الدرجة الثانية :

إذا كانت $\underline{ٱ} = \begin{bmatrix} ٱ & ب \\ حـ & د \end{bmatrix}$ ، فقد رأينا في البند (٢ - ٥) أن المقدار ٱ د - ب حـ

يدعى محددة $\underline{ٱ}$ ، ويرمز له بالرمز : $\begin{vmatrix} ٱ & ب \\ حـ & د \end{vmatrix}$ ، أي أن :

$$\text{محددة } \underline{ٱ} = \begin{vmatrix} ٱ & ب \\ حـ & د \end{vmatrix} = ٱد - ب حـ$$

يقال إن $\begin{vmatrix} ٱ & ب \\ حـ & د \end{vmatrix}$ محددة من الدرجة الثانية وتتكون كما نرى من صفين وعمودين ،

حيث : عنصرا الصف الأول هما : ٱ ، ب .

عنصرا الصف الثاني هما : حـ ، د .

عنصرا العمود الأول هما : ٱ ، حـ .

عنصرا العمود الثاني هما : ب ، د .

والآن إذا كان لدينا نظام معادلتين أنيتين في مجهولين س ، ص

$$\text{أ س + ب ص = ل} \qquad \ldots\ldots\ldots (٢ - ١٢)$$

$$\text{حـ س + د ص = ك} \qquad \ldots\ldots\ldots (٢ - ١٣)$$

فإننا ندعو الأعداد أ ، ب ، حـ ، د المعاملات . أما العددان ل و ك فيسميان الثوابت .

نسمي $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{د} \end{vmatrix}$ محددة المعاملات ويرمز لها بالرمز Δ .

لاحظ أن معاملي المجهول س يكونان العمود الأول للمحددة Δ وأن معاملي المجهول ص يكونان العمود الثاني للمحددة Δ

نسمي $\begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ب} \\ \text{ك} & \text{د} \end{vmatrix}$ محددة المجهول س ونرمز لها بالرمز $\Delta_{\text{س}}$ ونحصل عليها من Δ بأن نضع الثابتين ل ، ك في العمود الأول بدلاً من معاملي س (أ ، حـ) .

كما نسمي $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ل} \\ \text{حـ} & \text{ك} \end{vmatrix}$ محددة المجهول ص ونرمز لها بالرمز $\Delta_{\text{ص}}$ ونحصل عليها من المحددة Δ بأن نضع الثابتين ل ، ك في العمود الثاني بدلاً من معاملي ص (ب ، د) .

والآن بفرض أن $\Delta \neq 0$ فإن قيمتي المجهولين س ، ص تتحددان كالآتي :

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ب} \\ \text{ك} & \text{د} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{د} \end{vmatrix}} = \frac{\text{ل د} - \text{ب ك}}{\text{أ د} - \text{ب حـ}} \qquad \ldots\ldots\ldots (٢ - ١٤)$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ل} \\ \text{حـ} & \text{ك} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{د} \end{vmatrix}} = \frac{\text{أ ك} - \text{ل حـ}}{\text{أ د} - \text{ب حـ}} \qquad \ldots\ldots\ldots (٢ - ١٥)$$

يمكنك التحقق من أن القيمتين في (٢ -١٤) ، (٢ - ١٥) هما حل النظام الوارد في (٢ - ١٢) .

(٢ -١٣) بأن تتبع الأسلوب الذي تعلمته في صفوف سابقة ، فلو قمت بضرب طرفي المعادلة (٢ - ١٢) في د ، وطرفي المعادلة (٢ -١٣) في (- ب) ثم جمعت المعادلتين الناتجتين لحصلت على المعادلة : (أ د - ب حـ) س = د ل - ب ك (تحقق من ذلك)

$$\Longleftarrow \text{س} = \frac{\text{ل د} - \text{ب ك}}{\text{أ د} - \text{ب حـ}} \quad \text{، بشرط أ د} - \text{ب حـ} \neq 0$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ب} \\ \text{ك} & \text{د} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{د} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}$$

تدريب (٢ - ١١)

بيّن أن القيمة الواردة للمجهول ص في (٢ - ١٥) تكوّن مع قيمة س الواردة في (٢ - ١٤) حلاً لنظام المعادلتين (٢ - ١٢) ، (٢ - ١٣) .

ملحوظة (٢ - ٨)

من الضروري أن تدرك بأن الصيغتين في (٢-١٤)، (٢-١٥) هما مجرد هيكل رياضي لكتابة قيمتي س ، ص اللتين نحصل عليهما من المعادلتين (٢-١٢)، (٢-١٣) بطريقة الحذف المعتادة .

مثال (٢-٢٧) :

حل نظام المعادلتين الآتيتين باستخدام المحددات :

٣ س + ٢ ص = -٢ ، ٥ س - ٤ ص = ٦

الحل :

باستخدام الصيغتين الواردتين في (٢ - ١٤) ، (٢ - ١٥) نجد أن :

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{-22} = \frac{2}{11}$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{28}{-22} = -\frac{14}{11}$$

مثال (٢ – ٢٨) .

حــل نظام المعادلتين :

١١ س – ٧ ص = ٠ ، ٢ س – ص = ٠

الحل :

$$س = \frac{\begin{vmatrix} ٠ & -٧ \\ ٠ & -١ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ١١ & -٧ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix}} = \frac{٠}{٣} = ٠$$

$$ص = \frac{\begin{vmatrix} ١١ & ٠ \\ ٢ & ٠ \end{vmatrix}}{٣} = \frac{٠}{٣} = ٠$$

مثال (٢ – ٢٩)

حل نظام المعادلتين : – ٣ن = ٤ – ٣م ، ٦م + ن + ٤ = ٠

الحل :

إن المجهولين هما م ، ن ، نضع المعادلتين بالشكل :

٣ م – ٣ ن = ٤ ، ٦ م + ن = – ٤

ثم نوجد قيمتي م ، ن كما يلي :–

$$م = \frac{\Delta_م}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} ٤ & -٣ \\ -٤ & ١ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ٣ & -٣ \\ ٦ & ١ \end{vmatrix}} = \frac{-٨}{٢١}$$

$$ن = \frac{\Delta_ن}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٦ & -٤ \end{vmatrix}}{٢١} = \frac{-٣٦}{٢١} = -\frac{١٢}{٧}$$

ثانياً : استخدام محددات الدرجة الثالثة :

إذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{أ}' & \text{ب}' & \text{جـ}' \\ \text{أ}'' & \text{ب}'' & \text{جـ}'' \end{bmatrix}$ فإن :

محددة المصفوفة $\underline{\text{أ}}$ تعرّف بعدة طرق نختار منها الطريقة التالية :

محددة $\underline{\text{أ}} = \Delta$

$$= \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{أ}' & \text{ب}' & \text{جـ}' \\ \text{أ}'' & \text{ب}'' & \text{جـ}'' \end{vmatrix} = \text{أ} \begin{vmatrix} \text{ب}' & \text{جـ}' \\ \text{ب}'' & \text{جـ}'' \end{vmatrix} - \text{ب} \begin{vmatrix} \text{أ}' & \text{جـ}' \\ \text{أ}'' & \text{جـ}'' \end{vmatrix} + \text{جـ} \begin{vmatrix} \text{أ}' & \text{ب}' \\ \text{أ}'' & \text{ب}'' \end{vmatrix} \quad (٢-١٦)$$

والطرف الأيسر يحوي ثلاث محددات من الدرجة الثانية نحصل عليها كما يلي : –

$\begin{vmatrix} \text{ب}' & \text{جـ}' \\ \text{ب}'' & \text{جـ}'' \end{vmatrix}$ نحصل عليها من Δ بعد حذف الصف والعمود المتقاطعين في أ

$\begin{vmatrix} \text{أ}' & \text{جـ}' \\ \text{أ}'' & \text{جـ}'' \end{vmatrix}$ نحصل عليها من Δ بعد حذف الصف والعمود المتقاطعين في ب

$\begin{vmatrix} \text{أ}' & \text{ب}' \\ \text{أ}'' & \text{ب}'' \end{vmatrix}$ نحصل عليها من Δ بعد حذف الصف والعمود المتقاطعين في جـ

تسمى $\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{أ}' & \text{ب}' & \text{جـ}' \\ \text{أ}'' & \text{ب}'' & \text{جـ}'' \end{vmatrix}$ محددة من الدرجة الثالثة وتتكون من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة كما هو واضح .

مثال (٢-٣٠)

إذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ فجد محددة $\underline{\text{أ}}$

الحل : محددة $\underline{أ}$ = Δ =

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 2 - 2 \times 9 + 0$$

$$= -16$$

مثال (٢ - ٣١) :

جد محددتي المصفوفتين :

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 11 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

محددة $\underline{أ}$ $= \Delta = 1 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$

$$= -13 - 2 \times (-4) + 5 \times 1$$

$= -13 + 8 + 5 =$ صفراً

محددة $\underline{ب}$ $= \Delta = 4 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 0 \end{vmatrix}$

$$= 4 \times 0 - 0 \times 39 + 1 \times 0$$

= صفراً

حل أنظمة معادلات الدرجة الأولى في ثلاثة مجاهيل

إذا كان لدينا نظام المعادلات التالي في ثلاثة مجاهيل س ، ص ، ع :

$$\text{أ س} + \text{ب ص} + \text{جـ ع} = \text{هـ}_1 \qquad (٢ - ١٦)$$

$$\text{أَ س} + \text{بَ ص} + \text{جَـ ع} = \text{هـ}_2 \qquad (٢ - ١٧)$$

$$\text{أً س} + \text{بً ص} + \text{جـً ع} = \text{هـ}_3 \qquad (٢ - ١٨)$$

فإنه بطريقة مشابهة لما فعلنا في حالة النظام الحاوي على معادلتين بمجهولين ، نجعل .

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{أَ} & \text{بَ} & \text{جَـ} \\ \text{أً} & \text{بً} & \text{جـً} \end{vmatrix} \quad \text{محددة المعاملات}$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} \text{هـ}_1 & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{هـ}_2 & \text{بَ} & \text{جَـ} \\ \text{هـ}_3 & \text{بً} & \text{جـً} \end{vmatrix} \quad \text{محددة المجهول س}$$

ونحصل عليها من Δ بأن نضع الثوابت (هـ_1 ، هـ_2 ، هـ_3) في العمود الأول بدلاً من

معاملات س (أ ، أَ ، أً) .

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{هـ}_1 & \text{جـ} \\ \text{أَ} & \text{هـ}_2 & \text{جَـ} \\ \text{أً} & \text{هـ}_3 & \text{جـً} \end{vmatrix}$$

محددة المجهول ص ونحصل عليها من Δ بأن نضع الثوابت (هـ_1 ، هـ_2 ، هـ_3) في العمود الثاني بدلاً من معاملات ص (ب ، بَ ، بً)

$$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{هـ}_1 \\ \text{أَ} & \text{بَ} & \text{هـ}_2 \\ \text{أً} & \text{بً} & \text{هـ}_3 \end{vmatrix}$$

محددة المجهول ع ، ونحصل عليها من Δ بأن نضع الثوابت (هـ_1 ، هـ_2 ، هـ_3) في العمود الثالث بدلاً من معاملات ع : (جـ ، جَـ ، جـً)

وبفرض $\Delta \neq ٠$ ، نحصل على مجموعة الحل للنظام (٢ - ١٦) ، (٢ - ١٧) ،

(٢ – ١٨) فنجد أن :

$$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} \quad ، \quad ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} \quad ، \quad ع = \frac{\Delta_{ع}}{\Delta}$$

مثال (٢ – ٣٢) :

أوجد مجموعة الحـــل لنظام المعادلات الآتية :

س + ٣ ص – ع = ١ (٢ – ١٩)

٢ س + ٢ ص + ع = ٠ (٢ – ٢٠)

٣ س + ص + ٢ ع = – ١ (٢ – ٢١)

سنستخدم طريقتين للحـــل ، الأولى بواسطة المحددات والأخرى بطريقة الحذف .

(١) الحل بواسطة المحددات

$$\text{محددة المعاملات} = \Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ١- \\ ٢ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$= ١ \times (٤-١) - ٣ \times (٤-٣) + (-١) \times (٢ - ٦) = ٤$$

$$\text{محددة المجهول س} = \Delta_{س} = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ١- \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ١- & ١ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$= ١ \times (٤-١) - ٣ \times (٠ + ١) + (-١)(٠ + ٢) = -٢$$

$$\text{محددة المجهول ص} = \Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١- \\ ٢ & ٠ & ١ \\ ٣ & ١- & ٢ \end{vmatrix}$$

$$= ١ \times (١) - (١) \times (٤-٣) + (-١) \times (-٢- ٠) = ٢$$

محددة المجهول ع = $\Delta_{ع}$ =
$$\begin{vmatrix} ١ & ٣ & ١ \\ ٢ & ٢ & ٠ \\ ٣ & ١ & ١- \end{vmatrix}$$

$$= ١ \times (-٢) - ٣ \times (-٢) + ١ \times (٢-٦) = ٠$$

إذن : س = $\frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{-٢}{٤} = -\frac{١}{٢}$

ص = $\frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

ع = $\frac{\Delta_{ع}}{\Delta} = \frac{٠}{٤} = ٠$

(٢) الحل بطريقة الحذف :

س + ٣ ص − ع = ١ (٢ − ١٩)

٢س + ٢ ص + ع = ٠ (٢ − ٢٠)

٣ س + ص + ٢ ع = −١ (٢ − ٢١)

بضرب المعادلة (٢ − ١٩) في (− ٢) وجمعها مع المعادلة (٢ − ٢٠) ثم ضرب المعادلة (٢ − ١٩) في (− ٣) وجمعها مع المعادلة (٢ − ٢١) ، نحصل على المعادلتين :

− ٤ ص + ٣ ع = − ٢ (٢ − ٢٢)

− ٨ ص + ٥ ع = − ٤ (٢ − ٢٣)

بضرب المعادلة (٢ − ٢٢) في (− ٢) وجمعها مع المعادلة (٢ − ٢٣) فنحصل على :

− ع = ٠ أي : ع = ٠

بالتعويض في (٢ − ٢٢) نحصل على ص = $\frac{-٢}{-٤} = \frac{١}{٢}$

وبالتعويض في (٢ − ١٩) بالقيمتين : ص = $\frac{١}{٢}$ ، ع = ٠ نحصل على :

$$\text{س} = ١ - ٣ \times \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٢}$$

وهكذا نكون قد حصلنا على مجموعة الحل نفسها التي حصلنا عليها بالحل بواسطة المحددات .

ملحوظة (٢ – ٩)

إن طريقة حل نظام ثلاث معادلات خطية باستخدام المحددات ماهي إلا أسلوب تنظيمي لطريقة الحذف كما نوهنا إلى ذلك في حالة نظام معادلتين .

مثال (٢ – ٣٣) :

حــل نظام المعادلات التاليـة :

$$٢\text{س} - \text{ص} + ٣\text{ع} = ١$$

$$٣\text{س} + ٢\text{ص} = ٢$$

$$-\text{س} + \text{ع} = ٣$$

الحل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١- & ٣ \\ ٣ & ٢ & ٠ \\ ١- & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١٣ \text{ ،}$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ١ & ١- & ٣ \\ ٢ & ٢ & ٠ \\ ٣ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = -١٤ \text{ ،}$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ٣ & ٢ & ٠ \\ ١- & ٣ & ١ \end{vmatrix} = ٣٤ \text{ ،}$$

$$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} ٢ & ١- & ١ \\ ٣ & ٢ & ٢ \\ ١- & ٠ & ٣ \end{vmatrix} = ٢٥$$

مما تقدم نجد أن

$$\text{س} = -\frac{١٤}{١٣} \text{ ، } \text{ص} = \frac{٣٤}{١٣} \text{ ، } \text{ع} = \frac{٢٥}{١٣}$$

مثال (٢ - ٣٤) :

حـــل نظـــام المعـــادلات الآتيــــة .

س − ٢ ص = ٥ ع + ٢

ص = − ٢ س + ع + ١

ع = س − ص − ١

الحل :

نكتب نظام المعادلات بالصورة التالية :

س − ٢ ص − ٥ ع = ٢

٢ س + ص − ع = ١

− س + ص + ع = − ١

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & -٢ & -٥ \\ ٢ & ١ & -١ \\ -١ & ١ & ١ \end{vmatrix} = -١١ \quad ، \quad \Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٢ & -٢ & -٥ \\ ١ & ١ & -١ \\ -١ & ١ & ١ \end{vmatrix} = -٦$$

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٥ \\ ٢ & ١ & -١ \\ -١ & -١ & ١ \end{vmatrix} = ٣ \quad ، \quad \Delta_{ع} = \begin{vmatrix} ١ & -٢ & ٢ \\ ٢ & ١ & ١ \\ -١ & ١ & -١ \end{vmatrix} = ٢$$

إذن : $س = \frac{٦}{١١}$ ، $ص = \frac{-٣}{١١}$ ، $ع = \frac{-٢}{١١}$

مثال (٢ - ٣٥) :

أثبت أن قيمة المحددة $\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ أ' & ب' & جـ' \\ أ'' & ب'' & جـ'' \end{vmatrix}$

تساوي صفراً إذا كانت عناصر أحد أعمدتها كلها أصفاراً .

الحل :

توجد ثلاث حالات هي :

(١) عناصر العمود الأول كلها أصفار

(٢) عناصر العمود الثاني كلها أصفار

(٣) عناصر العمود الثالث كلها أصفار

نبرهن إحدى الحالات ولتكن (١) ونترك للطالب إثبات الحالتين الباقيتين في التمرين (١٠) من التمارين العامة .

(١) عناصر العمود الأول كلها أصفار بمعنى أن : $\text{أ} = \text{أ}' = \text{أ}'' = ٠$

$$\begin{vmatrix} ٠ & \text{ب} & \text{حـ} \\ ٠ & \text{ب}' & \text{حـ}' \\ ٠ & \text{ب}'' & \text{حـ}'' \end{vmatrix} = ٠ \times \begin{vmatrix} \text{ب}' & \text{حـ}' \\ \text{ب}'' & \text{حـ}'' \end{vmatrix} - \text{ب} \begin{vmatrix} ٠ & \text{حـ}' \\ ٠ & \text{حـ}'' \end{vmatrix} + \text{حـ} \begin{vmatrix} ٠ & \text{ب}' \\ ٠ & \text{ب}'' \end{vmatrix}$$

$$= \text{صفراً} - \text{صفراً} + \text{صفراً} = \text{صفراً}$$

وهو المطلـــوب .

مثال (٢ ٣٦) .

استفد من المثال السابق في حل النظام الآتي :

$$٢\,\text{س} + ٣\,\text{ص} - \text{ع} = ٠$$

$$\text{س} - ٢\,\text{ص} + \text{ع} = ٠$$

$$٥\,\text{س} + \frac{٣}{٤}\,\text{ص} + \frac{١}{٢}\,\text{ع} = ٠$$

الحل :

$$\triangle = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ١ & -٢ & ١ \\ ٥ & \frac{٣}{٤} & \frac{١}{٢} \end{vmatrix} = -\frac{٣}{٤}$$

ولما كانت عناصر العمود الأول من $\Delta_{س}$ أصفاراً فإن $\Delta_{س} = ٠$ ،

ولما كانت عناصر العمود الثاني من $\Delta_{ص}$ أصفاراً فإن $\Delta_{ص} = ٠$ ،

ولما كانت عناصر العمود الثالث من $\Delta_{ع}$ أصفاراً فإن $\Delta_{ع} = ٠$ ،

مما تقدم نجد أن : س = ص = ع = ٠

يمكن أن نستنتج من المثال (٢ – ٣٦) أن أي نظام معادلات من الدرجة الأولى في ثلاثة مجاهيل تكون قيم مجاهيله (حلوله) أصفاراً بشرط أن تكون :

(١) محددة معاملاته $\Delta \neq$ صفراً

(٢) الثوابت كلها أصفار .

ومن السهل على الطالب أن يعي أن هذه الحقيقة تسري بالنسبة لأنظمة المعادلات الخطية ذات المجهولين أيضاً . نختم هذا البند بالمثال الآتي :

مثال (٢ - ٣٧) :

أوجد قيم هـ التي تجعل لنظام المعادلات الآتية حلاً :

س + هـ ص = ٤

٢ س – ص = ٠

الحل :

يكون لهذا النظام حل عندما تكون محددة معاملاته $\Delta \neq$ صفراً . أي عندما :

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & هـ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} \neq ٠ \Longleftarrow -١ - ٢ هـ \neq ٠$$

$$\Longleftarrow هـ \neq -\frac{١}{٢}$$

ولعلك تلاحظ أنـه :

في حالة هـ = $-\frac{1}{2}$ نحصل على :

س $-\frac{1}{2}$ ص = ٤ (٢ – ٢٤)

٢ س – ص = ٠ (٢ – ٢٥)

بضرب المعادلة الأولى في (٢) نحصل على :

٢ س – ص = ٨ (٢ – ٢٦)

فلو فرضنا وجود حل مثل س = س. ، ص = ص. فإن هذا يقودنا إلى تناقض لانه حسب

(٢ – ٢٥) : ٢ س. – ص. = ٠ وحسب (٢ – ٢٦) :

٢ س. – ص. = ٨ أي أن ٠ = ٨ وهذا مستحيل . إذن لا يوجد حل عندما

هـ = $-\frac{1}{2}$ ومجموعة قيم هـ التي تجعل للنظام المعطى حلاً هي : ح – { $-\frac{1}{2}$ } .

تـمـارين (٢–٦)

(١) أحسب قيم المحددات الآتية :

(أ) $\begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٠ & ٦ \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} -٧ & ١٣ \\ ١٣ & -٧ \end{vmatrix}$ (حـ) $\begin{vmatrix} ٤ & ٤ \\ ٣ & ٣ \end{vmatrix}$

(د) $\begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٦ \\ ١ & ٠ & ١ \\ ٥ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$ (هـ) $\begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ٦ \\ ٤ & ٠ & ٧ \\ ٥ & ٠ & ٨ \end{vmatrix}$ (و) $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ & ٤ \\ ٣ & ٤ & ٦ \\ ٤ & ٦ & ٨ \end{vmatrix}$

(٢) أوجد حل كلٍ من الأنظمة الآتية باستخدام المحددات :

(أ) س + ٢ ص = ٠
٢ س + ٣ ص = ١

(ب) −٣ س − ٥ ص = − ١
س + ٦ ص = ٣

(حـ) ٢ س = ٣ ص + ٤
٥ ص = − ٤ س − ١

(د) ٦ ل − ٧ ك = ٠
٤ ل + ٣ ك = ٠

(٣) استخدم المصفوفات لحل أنظمة المعادلات في التمرين (٢) .

(٤) حل نظام المعادلات بثلاث طرائق وحقق النتائج

٧ س − ٣ ص = ١ ، ٢ س − ص = ٢

(٥) أوجد قيم هـ التي تجعل لنظام المعادلات الآتي حلاً

س + ٢ ص = ١ ، ٣ س + هـ ص = ٤

(٦) استخدم المحددات وطريقـة الحـذف في حل أنظمة المعادلات الآتية .

(أ)
س + ص + ع = ١
٢ س − ص − ع = − ١
٣ س + ٢ ص = ٢

(ب)
− س + ٣ ص + ل = ٠
٣ س − ٢ ص − ل = ١
س + ص + ٢ ل = ٠

(حـ)
٣ س = ٢ ص + ٣ + ع
٢ س − ص + ٤ = ع
ص + ع = − س + ٣

(د)
$\frac{١}{٢}$ س − $\frac{٢}{٣}$ ص + $\frac{٣}{٤}$ ع = ١
٣ س + ص − ع = −٢
٦ س − ص + ٢ ع = ٠

(٧) أوجد قيم هـ التي تجعل لنظام المعادلات الآتية حلاً :

$$\text{س} - \text{ص} + \text{ع} = ٠$$

$$\text{س} + \text{ص} + \text{هـ ع} = ٠$$

$$-\text{س} - \text{ص} + \text{ع} = ١$$

(٨) أثبـت أن المبـادلة بين صفّي محدّدة من الدرجة الثانية أو بين عموديها يغير إشارتها فقط .

أي أن :

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{د} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{حـ} & \text{د} \\ \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix} \quad \text{وأن} \quad \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{د} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{حـ} \end{vmatrix}$$

(٩) أثبت أن المبادلة بين أي صفين في محددة من الدرجة الثالثة يغير إشارتها فقط ، أي أن :

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{أ}' & \text{ب}' & \text{حـ}' \\ \text{أ}'' & \text{ب}'' & \text{حـ}'' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{أ}' & \text{ب}' & \text{حـ}' \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{أ}'' & \text{ب}'' & \text{حـ}'' \end{vmatrix}$$

وكذلك المبادلة بين الصفين الأول والثالث والمبادلة بين الصفين الثاني والثالث .

(١٠) أثبت أن المبادلة بين أي عمودين في محدّدة من الدرجة الثالثة يغير إشارتها فقط .

تمارين عامة

(١) حل المعادلة التالية وحقّق الناتج :

$$٢\underline{س} + \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} = ٢\left(\underline{س} - \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}\right)$$

(٢) أوجد النظير الجمعي ، ثم الضربي إن أمكن لكل مصفوفة فيما يأتي :

(أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ ، (ب) $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix}$ ، (حـ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ، (د) $\begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ -٤ & -٢ \end{bmatrix}$

(٣) عبّر عما يأتي بمصفوفة واحدة :

$$\begin{bmatrix} س & ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

(٤) برهن أن المصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ تحقق المعادلة $\underline{س}^٢ - ٤\underline{س} - ٥\,\underline{م} = \underline{٠}$

(٥) إذا علمت أن $\underline{س} = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ فالمطلوب :

(أ) إثبات أن $\underline{س}^٢ - ٢\,\underline{س} = ٣\,\underline{م}$

(ب) إستعمل النتيجة (أ) لإيجاد $\underline{س}^{-١}$

(إرشاد : حلل الطرف الأيمن للمعادلة المعطاة)

(٦) إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ فإن المعادلة المصفوفية .

$\underline{أ}^٢ + س\,\underline{أ} + ص\,\underline{م} = \underline{٠}$ تكافئ مجموعة من أربع معادلات في مجهولين س ، ص

والمطلوب : (أ) أوجد $\underline{أ}^٢$ ثم اكتب المعادلات الأربع المشار إليها .

(ب) حل المعادلات المذكورة في (أ) بطريقتين مختلفتين .

(٧) حل أنظمة المعادلات الآتية باستخدام المصفوفات :

(أ) س + ٢ ص = ٨ ، ٢ س + ٤ ص = ١٤

(ب) ٣ س − ٤ ص − ١٣ = ٠ ، ٥ س + ص + ٤ = ٠

(٨) إذا كانت س ، ص مصفوفتين من النوع ٢ × ٢ فاثبت أن :

محدّدة س × محدّدة ص = محدّدة (س . ص)

ملحوظة : العلاقة أعلاه صحيحة بصورة عامة لجميع المصفوفات المربعة ن × ن ولكن نكتفي بأن يبرهنها الطالب في الحالة ن = ٢

(٩) حل أنظمة المعادلات الآتية باستخدام المحددات :

(أ) س + $\frac{١}{٢}$ ع + $\frac{١}{٤}$ ل = ٠

٢س − ع − ٤ ل = ٠

س + ٢ع + ل = ١

(ب) $\frac{١}{٣}$ س − $\frac{٢}{٣}$ ص + $\frac{٥}{٦}$ ع = ١

$\frac{٣}{٤}$ س + ص − ع = ٠

س + $\frac{٣}{٥}$ ع = ٠

(حـ) ١٦س − ١٣ ص + ع = ٠

س + ١٤ص + ١٢ع = ١

١١ س + ص + ١٥ع = ٠

(١٠) أكمل بالتفصيل إثبات الحالات الباقية من المثال (٢ − ٣٥)



الباب الثالث

حساب المثلثات

٣ – ١ لمحة تاريخية .

٣ – ٢ مفاهيم أولية .

٣ – ٣ الدوال الدائرية .

٣ – ٤ تبسيط بعض قيم الدوال الدائرية .

٣ – ٥ التمثيل البياني لدالتي الجيب وجيب التمام .

٣ – ٦ الدوال المثلثية للزاوية وتطبيقات حساب المثلثات .

٣ – ٧ الدوال الدائرية لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما .

٣ – ٨ الدوال الدائرية لمضاعفات الزوايا .

٣ – ٩ قوانين التحويل

٣ – ١٠ المعادلات المثلثية .

٣ – ١١ العلاقة بين قياسات زوايا المثلث وأطوال أضلاعه .

الباب الثالث - حساب المثلثات (٢)

٣ - ١ لمحة تاريخية :

إذا كنا بصدد دراسة علم المثلثات ، فإن مؤرخي الحضارة اعتبروه علماً عربياً ، ذلك أنه « لولا العرب المسلمون لما كان هذا العلم على ما هو عليه الآن ، فإليهم يرجع الفضل بتوفيق الله تعالى في وضعه بشكل علمي منظم » .

وإذا كان أسلافنا قد ورثوا ما توصل إليه اليونان والهنود من أوليات هذا العلم ، فإن اليونان والهنود إنما بحثوا ذلك في ثنايا علم الفلك وكما أسلفنا في باب المثلثات الذي قدمناه لك في الصف الأول ، فإن العرب المسلمين هم الذين نظموا المعارف المتعلقة بهذا العلم ، ثم جعلوا منها علماً مستقلاً عن علم الفلك ، وأسموه **علم الأنساب** ، لأنه يقوم على الأوجه المختلفة الناشئة بين أضلاع المثلث .

وقد استنبط العرب المسلمون الظل (أي قياس الزاوية المفروضة بالضلع المقابل لها مقسوماً على الضلع المجاور) كما استنبطوا ظل التمام .

إن حشداً كبيراً من علمائنا المسلمين كان لهم دور في تقدم هذا العلم وازدهاره ، ذكرنا لك منهم أبا عبد الله محمد بن جابر البتاني (٢٣٥ - ٣١٧هـ) وهو أول من وضع جداول ظل التمام ، وأبا الوفاء محمد بن اسماعيل البوزجاني (٣٢٨ - ٣٨٨هـ) الذي أوجد طريقةً جديدة لحساب جداول الجيب ، وكان جيب الزاوية المساوية ٣٠ دقيقة (أي نصف درجة) محسوباً فيها حساباً صحيحاً إلى الرقم الثامن من الكسر العشري ، وكذلك فهو الذي عرَّف الصلات في المثلثات مما نعبِّر عنه اليوم بالرمز حا (٩ ± ب) ، كما كشف عدداً من الصلات بين الجيب والظل والقاطع وتماماتها .

والجدير بالذكر أن الغربيين ، بعد أن نُقلت إليهم حضارتنا وعلومنا نسبوا الكثير من اكتشافاتنا إلى علمائهم مخالفين بذلك الأمانة العلمية التي يدَّعونها ، فلقد اعترف المؤلف الكبير في تاريخ العلوم « فلورين كاجوري » في كتابه تاريخ الرياضيات « أن هناك أموراً كثيرة وبحوثاً عديدة

في علم حساب المثلثات ، كانت منسوبة إلى «ريجيو مونتـانوس» ، ثبت أنها من وضع العرب المسلمين ، وأنهم سبقوه إليها » كما أيَّده بذلك مؤرخون غربيون آخرون مثل « جورج سارتن ، وديفيد يوجين سمث » ، وغيرهم في « أن جـميع مؤلفات هذا العالم اعتمدت على كتب العرب المسلمين ، وأنَّه نقل عنهم الكثير من البحوث ، خاصة فيما يتعلق بعلم حساب المثلثات » .

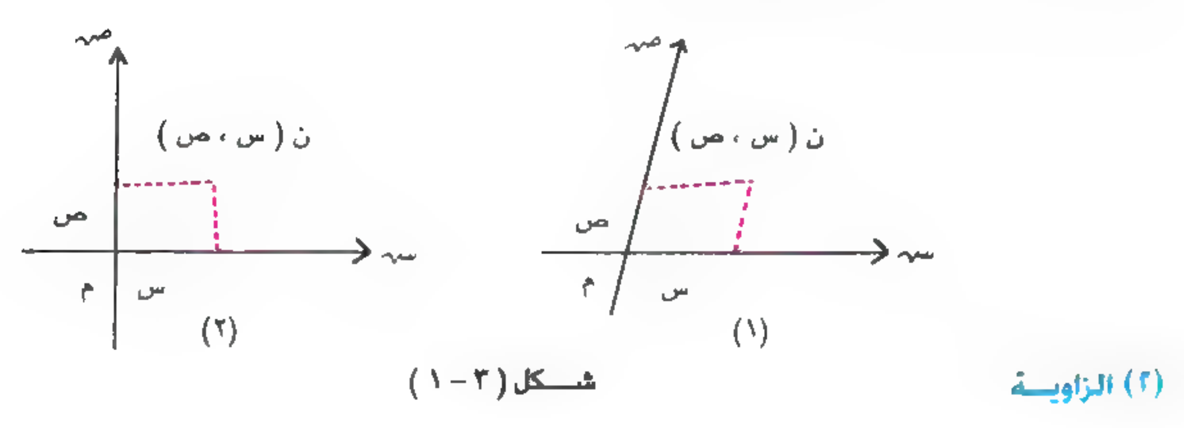
ويقول «جوزيف هل» ، في كتابه حضارة العرب :« إن علم الجيب والظل يعتبر من علوم المسلمين » وأضاف الدكتور «ستروك» في كتابه : المختصر في تاريخ الرياضيات : « إن كلمة جيب كلـمة عربيـة ، وهذا لايـترك مجـالاً للشـك إلى أن الفضل يرجع إلى المسلمين ، في تطويرها إلى ماهي عليه الآن » .

٣ - ٢ مفاهيم أولية

نقدم فيما يلي بعض المفاهيم الضرورية لدراسة حساب المثلثات ، وإن جلَّ هذه المفاهيم معلوم لدى الطالب فهي تقدم له على سبيل المراجعة .

(١) المستوي

سبق أن تعرفت على المستوي من خلال دراستك لكل من الهندسة والهندسة التحليلية ، وأقمت فيـــه محورين مدرجين بحـيـث يـقـابل كل نقطة فيه زوج مرتب من الأعداد الحقيـقية (س ، ص) هما إحداثيا تلك النقطة ، وقـد سمـينا المستوي بعد إضفاء هذه الصفة عليه : المستوي الإحداثي (أو المستوي الديكارتي) كما في الشكل (٣ - ١)



شـــكل (٣ - ١)

(٢) الزاويـــة

وقد تعرفت أيضاً على مفهوم القطاع الزاوي والزاوية ، ولعلك تذكر تساوي الزاويتين اللتين يمثلهما القطاعان الزاويان :

[أب ، أحـ] ، [أحـ ، أب]

أي أن ب أ حـ = حـ أ ب

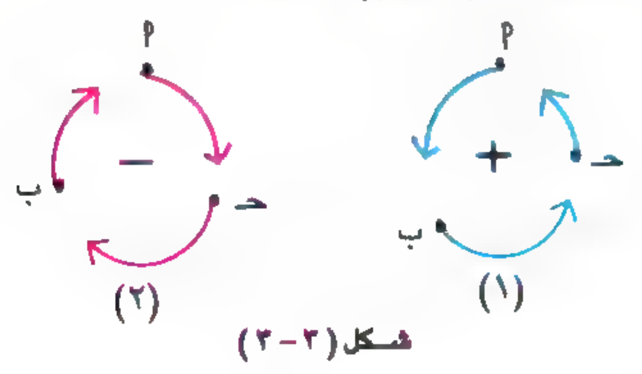
أنظر الشكل (٣ - ٢)

حـ
أ
ب

شـــكل (٣ - ٢)

٣ - توجيه المستوى

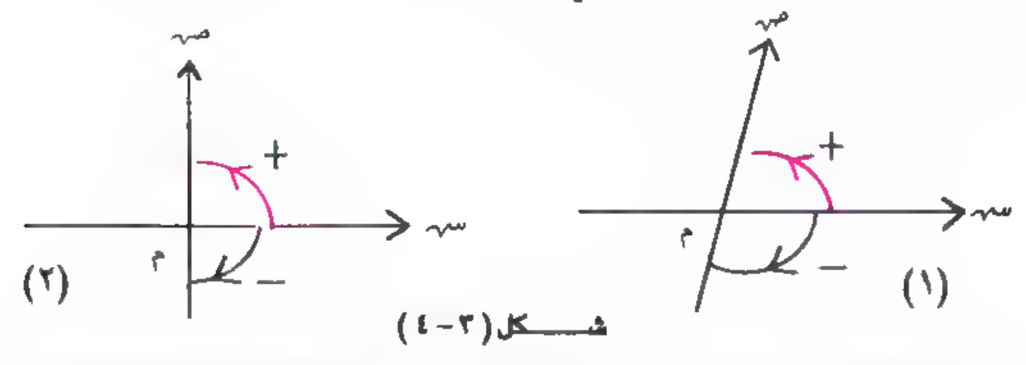
لو اعتبرنا المستوي ســ والنقاط ٩ ، ب ، حـ ∋ ســ ليست على استقامة واحدة ، ففي الشكل (٣ - ٣/١) نجد أن الدورانات (٩ ، ب ، حـ) ، (حـ ، ٩ ، ب) ، (ب ، حـ ، ٩) لها الاتجاه نفسه ، إنه الاتجـاه المخالف لدوران عقارب الساعة .



شكل (٣-٣)

وفي الشكل (٣-٣/٢) نجد أن الدورانات . (٩ ، حـ ، ب) ، (ب ، ٩ ، حـ) ، (حـ ، ب ، ٩) لها الاتجاه نفسه ، إنه الاتجاه الموافق لدوران عقارب الساعة . ومن الواضح أن الاتجاهين متضادان .

وقد اصطلح على اعتبار الاتجاه الأول موجباً ، والاتجاه الثاني سالباً ولو كان المستوي ســ مستوياً إحداثياً ، واعتبرنا عليه الاتجاهين آنفي الذكر ، لدعوناه **مستوياً موجـهاً**



شكل (٣-٤)

يمثل الشكل (٣-٤/١) نـظام محاور إحداثية مائلة . كما يمثل الشكل (٣-٤/٢) نظام محاور إحداثية متعامدة . سـنعتمد في دراسـتـنا هذه على حـالة مستـوٍ إحداثي موجه منسوب إلى نظام إحداثي متعامد .

٤ - الزاوية الموجهة :

تعريف (٣-١)

إذا رسمنا في مستوٍ موجه نصفي مستقيمين [أ ب ، [أ جـ يشتركان في مبدئهما أ ، فإن الزوج المرتب ([أ ب ، [أ جـ) يسمى الزاوية الموجهة التي ضلعها الابتدائي [أ ب ، وضلعها النهائي [أ جـ ورأسها النقطة أ . وتكتب بإحدى الطريقتين .

([أ ب ، [أ جـ) أو $\overleftarrow{\text{ب أ جـ}}$ > ؛ انظر الشكل (٣ - ٥)

وبناءً على ما رأينا في توجيه المستوي ، فإن الزاوية الموجهة تكون موجبة إذا كان الضلع الابتدائي يدور بالاتجاه الموجب لينطبق على الضلع النهائي ، وتكون سالبة إذا كان الدوران المذكور بالاتجاه السالب . فإذا كان العدد الحقيقي هـ يعبر عن قياس الزاوية الموجهة ([أ ب ، [أ جـ) ، فإننا نعبر عن ذلك بقولنا :

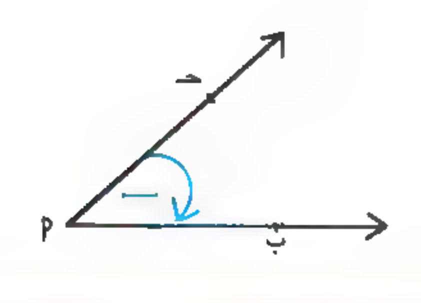
شكل (٣-٥)

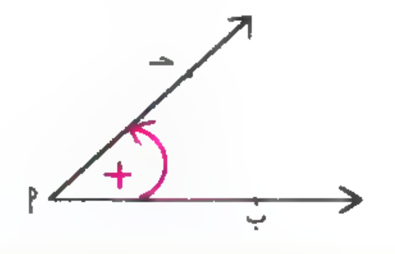
ق ([أ ب ، [أ جـ) = هـ ونقرأ : قياس الزاوية الموجهة ([أ ب ، [أ جـ) يساوي هـ ويكون

ق ([أ جـ ، [أ ب) = − هـ

نلخص ذلك بقولنا : ([أ ب ، [أ جـ) = − ([أ جـ ، [أ ب)

أو : $\overleftarrow{\text{ب أ جـ}}$ > = − $\overleftarrow{\text{جـ أ ب}}$ > . (انظر الشكل ٣ - ٦)





شكل (٣-٦)

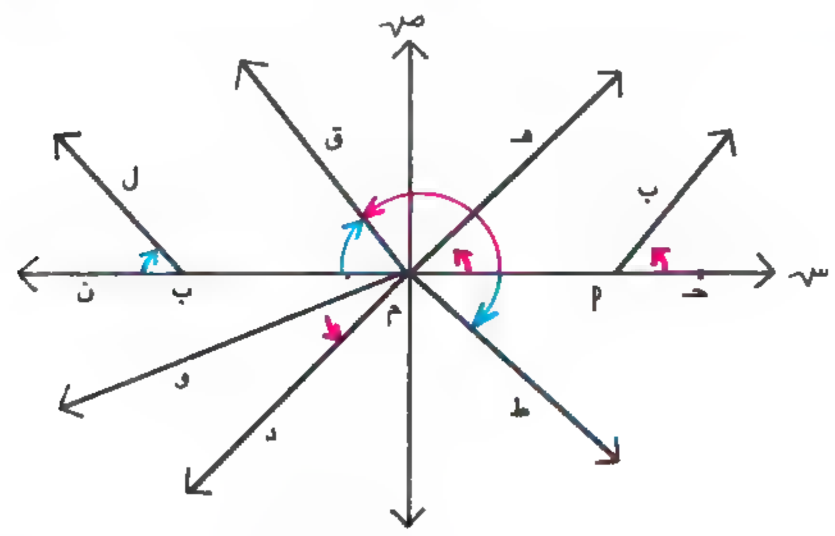
تعريف (٣ – ٢)

إذا كان لدينا نظام إحداثي متعامد للمستوى ⌒ وزاوية موجهة في ⌒ ،

فإنه يقال : إن الزاوية الموجهة في **وضع قياسي** إذا انطبق رأسها على نقطة الأصل وضلعها الابتدائي على الجزء الموجب لمحور السينات .

تدريب (٣–١)

في الشكل (٣ – ٧) الزاوية ⟨ حـ م هـ في وضع قياسي لانطباق رأسها على نقطة الأصل ولأن ضلعها الابتدائي [م حـ منطبق على الجزء الموجب لمحور السينات وهي زاوية موجبة لأن ضلعها الابتدائي يدور بالاتجاه الموجب لينطبق على الضلع النهائي [م هـ بينما الزاوية ⟨ حـ P ب ليست في وضع قياسي (رأسها لا ينطبق على نقطة الأصل) وهي أيضاً زاوية موجبة (لماذا ؟) .



شكل (٣ – ٧)

(١) ماذا تقول عن الزوايا الموجهة : ⟨ حـ م ط ، ⟨ و م د ، ⟨ ن ب ل ، ⟨ ن م ق ، ⟨ حـ م ق ، في الشكل (٣ – ٧) ، من حيث الوضع القياسي والاتجاه ؟

(٢) أكـــمل ما يلي :

([م ب ، [م حـ) = < ب م حـ ، < حـ هـ د = ([هـ حـ ، [هـ د)

([حـ ن ، [حـ ق) = ، < حـ ب د =

([و س ، [و ص) = ، < ق م هـ =

ملحوظة (٣ - ١)

إذا كانت الزاوية الموجهة في وضع قياسي ، فإننا ننسبها إلى الربع الذي يقع فيه ضلعها النهائي . فلو وقع ضلعها النهائي في الربع الأول ، مثلاً ، قلنا إن الزاويــة تقــع في الربع الأول كالزاوية < أ م ب في الشكل (٣ - ٨) بينما تقع الزاوية < أ م حـ في الربع الثالث (لماذا ؟)

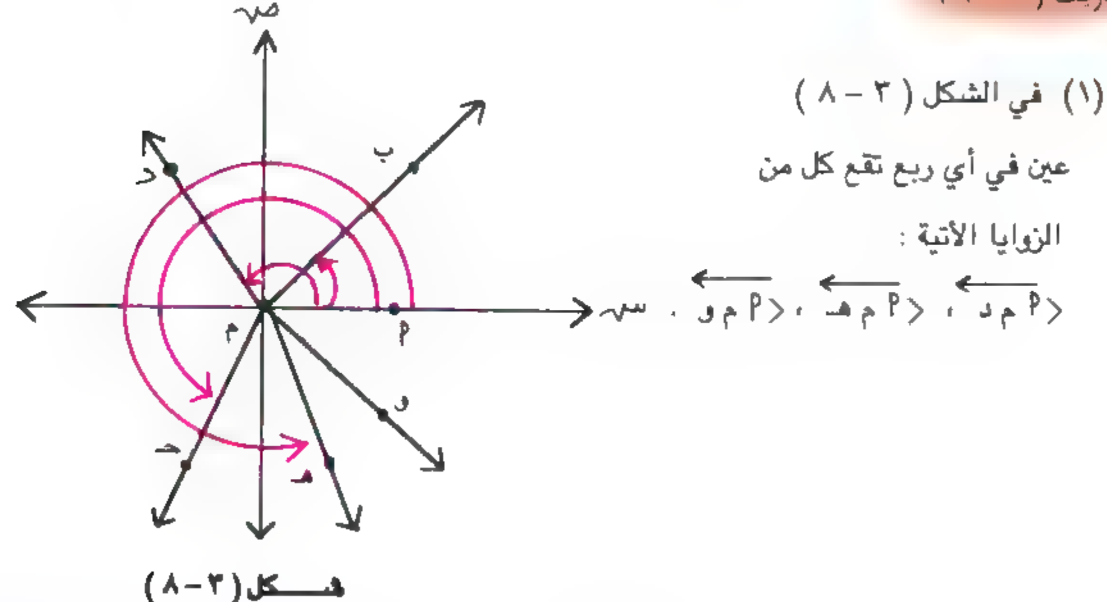
تدريب (٣ - ٢)

(١) في الشكل (٣ - ٨)

عين في أي ربع تقع كل من

الزوايا الآتية :

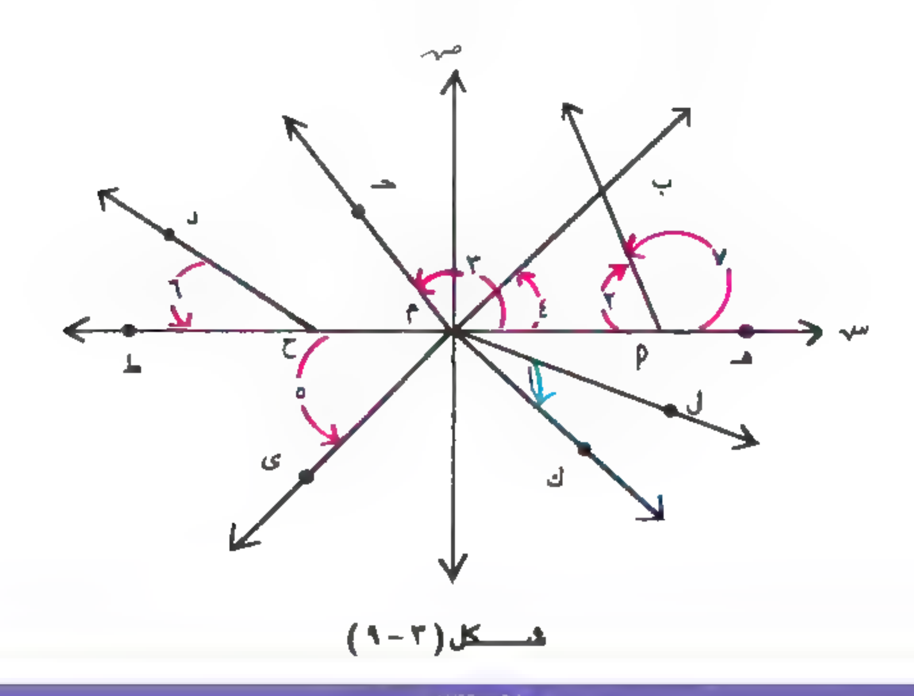
< أ م د ، < أ م هـ ، < أ م و .



شـــكل (٣-٨)

(٢) أكمل الجـدول الـتالي مستعيناً بالشـكل (٣ – ٩) :

الرقم	كتابة الزاوية الموجهـة بشكل زوج مرتب	بالشكل الآخر	الربع الـذي تقـع فـيه	الاتجـاه
١	([م ل ، [م ك)	∠ ل م ك ←	ليست بوضع قياسي	سالـب
٢		∠ م ﻢ ب ←		
٣			الثـاني	
٤				
٥				
٦				
٧				

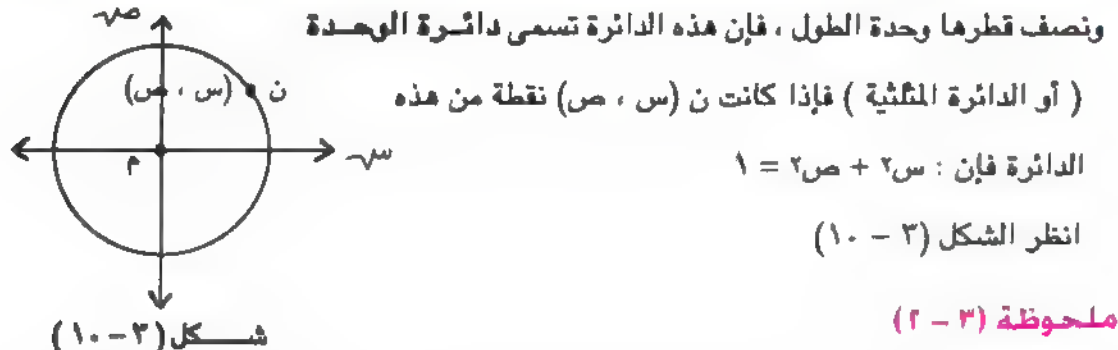


شـكل (٣ – ٩)

(٥) دائـــرة الوحـــدة

إذا رسمنا في مستوٍ موجه منسوب إلى نظام إحداثي متعامد ، دائرةً مركزها نقطة الأصل ، ونصف قطرها وحدة الطول ، فإن هذه الدائرة تسمى دائـرة الوحـدة (أو الدائرة المثلثية) فإذا كانت ن (س ، ص) نقطة من هذه الدائرة فإن : $س^2 + ص^2 = 1$

انظر الشكل (٣ - ١٠)



شـــكل (٣-١٠)

ملحوظة (٣ - ٢)

واضح أن محيط دائرة الوحدة = ٢ط وحدة طول (لماذا ؟) فإذا كانت وحدة الطول هي السنتمتر ، فإن محيط دائرة الوحدة يساوي (٢ط) سم ، حيث ط (أو π) عدد حقيقي غير نسبي وقيمته التقريبية ٣٫١٤ أو $\frac{٢٢}{٧}$ أو $\frac{٣٥٥}{١١٣}$

(لاحظ أن القيم التقريبية للعدد ط هي أعداد نسبية وأن القيمة الأخيرة هي أقرب هذه القيم إلى ط)

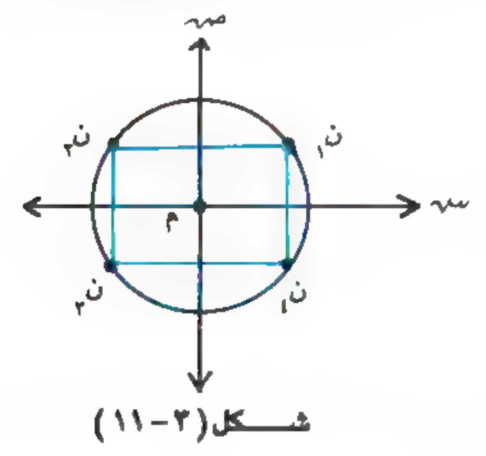
تدريب (٣ - ٣)

إذا كانت $ن_1$ (س ، ص) $\in$ (د) دائرة الوحـدة شكل (٣ - ١١) فـأوجد إحداثيي كلٍ من النقاط

$ن_2$ (نظيرة $ن_1$ بالنسبة للمحور الصادي)

$ن_3$ (نظيرة $ن_2$ بالنسبة للمحور السيني)

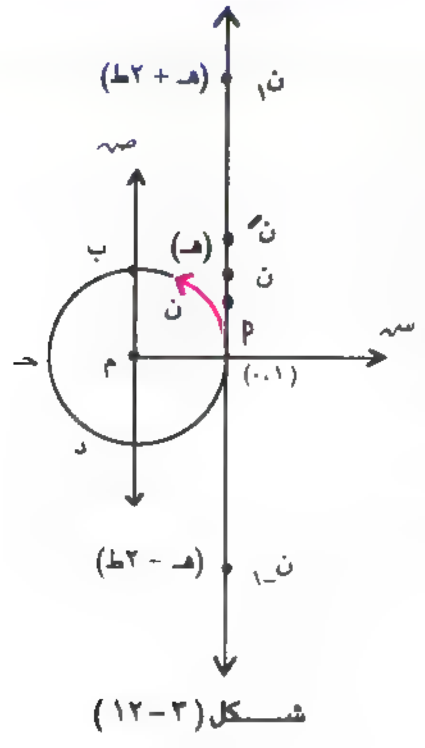
$ن_4$ (نظيرة $ن_1$ بالنسبة للمحور السيني)



شـــكل (٣-١١)

تحـقق أن $ن_2$ ، $ن_3$ ، $ن_4$ تنتمي إلى دائرة الوحدة (د) ، وأن $ن_3$ نظيرة $ن_1$ بالنسبة لنقطة الأصل م ، أوجد نظيرة $ن_2$ بالنسبة لـ م .

(٦) قياس الزاوية الموجهة :



شـــكل (٣ - ١٢)

لو جعلنا خط الأعداد الحقيقية مماساً لدائرة الوحدة في النقطة ؠ (١،٠) التي هي بالوقت ذاته نقطة الأصل لخط الأعداد كما في الشكل (٣ - ١٢) على أن تكون الأعداد الحقيقية الموجبة ممثلة بالنقاط الواقعة فوق محور السينات ، والسالبة ممثلة بالنقاط الواقعة تحته ، ولو اعتبرنا خط الأعداد مادياً مرناً، بحيث يمكن لفه على الدائرة ، فإن كل نقطة من خط الأعداد لابد من انطباقها على نقطة من الدائرة ، فالنقطة $ن_\cdot$ مثلاً من خط الأعداد تنطبق على النقطة ن من الدائرة ويكون :

طول القوس [$\overset{\frown}{ؠ ن}$] = طول القطعة [ؠ $ن_\cdot$] ، وللسبب نفسه

فإن : طول [$\overset{\frown}{ؠ ب}$] = طول [ؠ $\bar{ن}$] = $\frac{1}{4}$ (٢ط)

= $\frac{ط}{2}$ وحدة طول

وإذا كان طول [$ن_\cdot$ $ن_1$] = ٢ ط وحدة طول فإن $ن_1$ ستنطبق أيضاً على ن أثناء عملية اللف

وعلى هذا فإن كل نقطة من خط الأعداد تقابلها نقطة على الدائرة ، بينما نجد أن كل نقطة من الدائرة يقابلها عدد لا نهائي من نقاط خط الأعداد ، بحيث تكون المسافة بين نقطتين متتاليتين منها مساوية ٢ط (وحدة طول) . أو بتعبيرٍ آخر :

كل نقطة من الدائرة يقابلها على خط الأعداد الحقيقية مجموعة من الأعداد ، بحيث يكون الفرق بين كل عددين متتاليين مساوياً ٢ط فعند لف الجزء الموجب من خط الأعداد ، إذا كانت $ن_\cdot$ الممثلة للعدد الحقيقي هـ أول نقطة تنطبق على ن ، فإن النقاط المنطبقة على ن هي

$ن_\cdot$ ، $ن_1$ ، $ن_2$ ، .... $ن_م$ ....

↓ ↓ ↓ ↓

الممثلة للأعداد : هـ ، هـ + ٢ط ، هـ + ٤ط ..... هـ + ٢م ط ...... ، م ∈ $ص^+$ ∪ { ٠ }

وعند لف الجزء السالب من خط الأعداد نجد أن النقاط المنطبقة على ن هي :

$ن_1$ ، $ن_2$ ، $ن_3$ ، ...... ، $ن_م$ ....

↓ ↓ ↓ ↓

الممثلة للأعداد : هـ − ٢ط ، هـ − ٤ط ، هـ − ٦ط ، ... ، هـ +٢م ط ... ، م ∈ $ص^-$ ∪ { ٠ }

وبالتالي فإن النقطة ن ستنطبق عليها النقاط الممثلة لعناصر المجموعة :

{ هـ + ٢م ط : م ∈ ص } . وهـكـذا .....

نجد أن كل عدد حقيقي ستكون له صورة على دائرة الوحدة ، ونعبر عن ذلك بقولنا :

توجد دالة (يسميها البعض دالة اللف) مجالها مجموعة الأعداد الحقيقية ح ومجالها المقابل مجموعة نقـاط دائرة الوحـدة .

ففي الشكل (٣ − ١٢) النقطة ٩ (١ ، ٠) هي صورة لكلٍ من عناصر المجموعة :

{ ..... ، −٤ط ، −٢ط ، ٠ ، ٢ط ، ٤ط ، .... } = { ٢م ط : م ∈ ص }

والنقطة ب (٠ ، ١) هي صورة لكلٍ من عناصر المجموعة :

{ ... ، $\frac{-٧ط}{٢}$ ، $\frac{-٣ط}{٢}$ ، $\frac{ط}{٢}$ ، $\frac{٥ط}{٢}$ ، $\frac{٩ط}{٢}$ ، ..... } = { $\frac{ط}{٢}$ + ٢ م ط : م ∈ ص }

والنقطة حـ (− ١، ٠) هي صورة لكل من عناصر المجموعة :

{ ط + ٢م ط : م ∈ ص } (لماذا ؟)

والنقطة د (٠، −١) هي صورة لكل من عناصر المجموعة :

{ $\frac{٣ط}{٢}$ + ٢ م ط : م ∈ ص } (لماذا ؟)

أو : { − $\frac{ط}{٢}$ + ٢ م ط : م ∈ ص } (لماذا ؟)

وبصورة عامة :

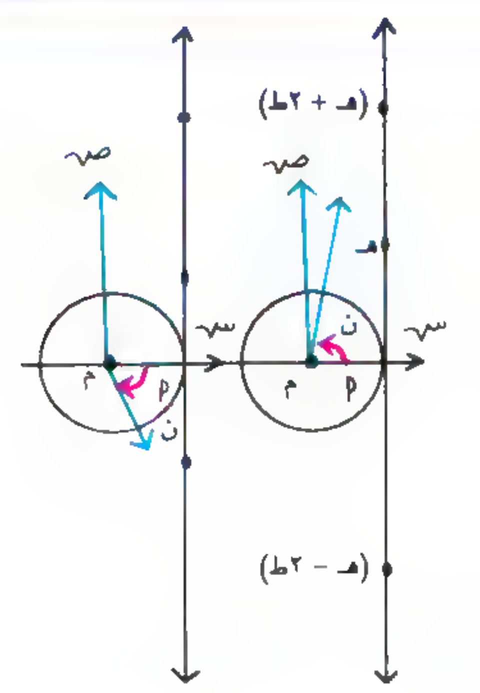
إذا كانت ∠ ٩ م ن موجبة وبوضع قياسي (٩ ، ن تقعان على دائرة الوحدة) فإن أصغر عدد حقيقي

موجب هـ صورته النقطة ن يساوي طول القوس [أ ن] المقابلة لتلك الزاوية ، ومن الواضح أن جميع الأعداد الحقيقية (الموجبة والسالبة) التي صورتها النقطة ن هي عناصر المجموعة :

{ هـ + ٢ م ط : م ∈ ص } . انظر الشكل (٣-١٣)

أما إذا كانت ∠ أ م ن سالبة كما في الشكل (٣-١٤) فإن أكبر عدد حقيقي سالب هـ صورته النقطة ن ، تكون قيمته المطلقة | هـ | مساوية طول القوس [أ ن] المقابلة لتلك الزاوية ، وكذلك نجد أن جميع الأعداد الحقيقية التي صورتها النقطة ن ، هي عناصر المجموعة :

{ هـ + ٢م ط : م ∈ ص } .



شكل (٣-١٣) شكل (٣-١٤)

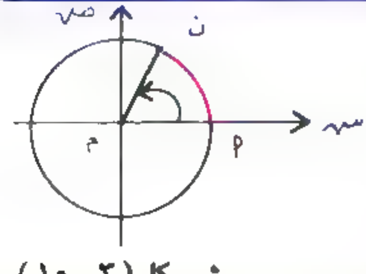
تعريف (٣-٣)

يسمى العدد الحقيقي هـ + ٢ م ط (م ∈ ص) القياس العام للزاوية الموجهة ∠ أ م ن ، حيث | هـ | هو العدد الدال على طول القوس من دائرة الوحدة الذي يقابل تلك الزاوية ، ويسمى العدد الحقيقي هـ ∈]- ٢ط ، ٢ط [**القياس الرئيسي** للزاوية الموجهة ∠ أ م ن بالتقدير الدائري .

ملحوظة (٣ - ٣)

يمثل الشكل (٣ - ١٥) الزاوية الموجهة ∠ أ م ن التي قياسها = ١ بالتقدير الدائري .

فيكون طول القوس [أ ن] = ١ (وحدة طول) = طول نصف قطر دائرة الوحدة .



شكل (٣-١٥)

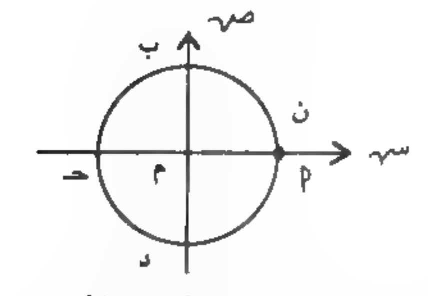
وحينئذ نقول :

ق ($\overleftarrow{\text{< أ م ن}}$) = ١ زاوية نصف قطرية (أو : راديان)

وتقرأ : قياس ($\overleftarrow{\text{< أ م ن}}$) = ١ زاوية نصف قطرية (أو : راديان)

والزاوية نصف القطرية (أو الراديان) ، كما تعلم ، **هي قياس زاوية مركزية تقابل قوساً من دائرة ، طوله مساوٍ نصف قطر تلك الدائرة .**

حـــالات خـــاصة



شـــكل (٣ - ١٦)

حـاول إيجـاد القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $\overleftarrow{\text{< أ م ن}}$ إذا أنطبقت ن على النقاط أ ، ب ، حـ ، د من دائرة الوحدة ، على التوالي ، ثم أوجد القياس العـام لكل من هذه الزوايا .

- لعلك لاحظت أنه عندما ن = أ يكون طول [$\overset{\frown}{\text{أ ن}}$] = ٠ ، شكل (٣ - ١٦) ويكون القياس الرئيسي للزاوية $\overleftarrow{\text{< أ م ن}}$ هو الصفر .

والقياس العام للزاوية $\overleftarrow{\text{< أ م ن}}$ هو { ٢ م ط : م ∈ ص } .

- ولعلك توصلت إلى أن :

ن = ب ⟸ طول [$\overset{\frown}{\text{أ ب}}$] = $\frac{١}{٤}$ × ٢ ط = $\frac{ط}{٢}$ (وحدة طول)

فيكون القياس الرئيسي للزاوية $\overleftarrow{\text{< أ م ب}}$ هو : $\frac{ط}{٢}$ راديان

شكل (٣ - ١٧)

والقيـاس العـام هو : { $\frac{ط}{٢}$ + ٢ م ط : م ∈ ص }

ص
ب ن
س
حـ م أ
د

شـــكل (٣ - ١٧)

- وتجد بسهوله أن

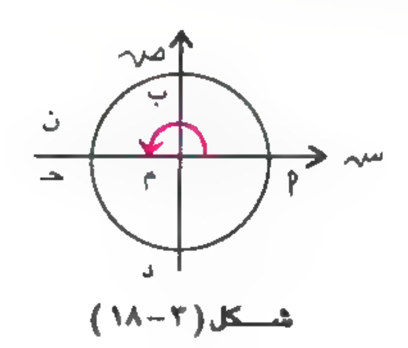
ن = حـ ⟸ طول القوس [$\overset{\frown}{\text{أ ن}}$] = $\frac{١}{٢}$ × ٢ ط = ط (وحدة طول)

فيكون القياس الرئيسي للزاوية $\overleftarrow{\text{< أ م ن}}$ = ط راديان

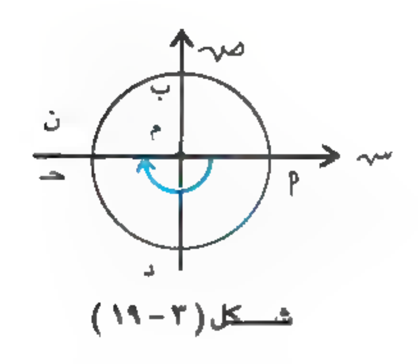
والقياس العام هو : { ط + ٢ م ط : م ∈ ص } ، الشكل (٣ – ١٨)

(لاحظ أنه يمكن اعتبار قياس الزاوية < أ م حـ مساوياً : { – ط + ٢ م ط : م ∈ ص } .

(لماذا ؟) انظر الشكل (٣ – ١٩) .



شكل (٣ – ١٨)



شكل (٣ – ١٩)

– وتجد أخيراً أن :

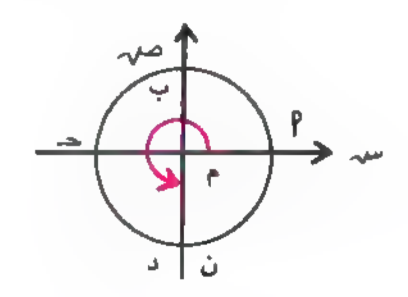
ن = د ⟸ طول القوس [أ ن] = $\frac{٣}{٤}$ × ٢ ط = $\frac{٣}{٢}$ ط (وحدة طول)

فيكون القياس الرئيسي للزاوية < أ م ن = $\frac{٣ط}{٢}$ راديان

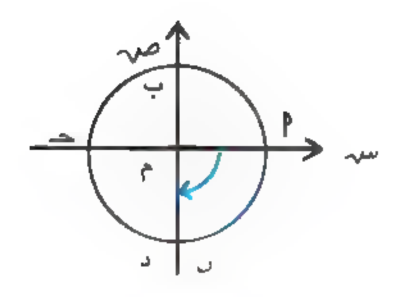
والقياس العام هو { $\frac{٣ط}{٢}$ + ٢ م ط : م ∈ ص } ، شكل (٣ – ٢٠)

(لاحظ أنّه يمكن اعتبار قياس الزاوية < أ م د مساوياً :

{ – $\frac{ط}{٢}$ + ٢ م ط : م ∈ ص } . لماذا ؟ ، انظر الشكل (٣ – ٢١)



شكل (٣ – ٢٠)



شكل (٣ – ٢١)

مثال (٣ - ١) :

أوجد طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها الرئيسي $\frac{٣ط}{١١}$ راديان

(١) إذا كان القوس من دائرة الوحدة

(٢) إذا كان القوس من دائرة نصف قطرها ١٤ سم (ط $\approx \frac{٢٢}{٧}$)

الحل :

(١) إذا كان القوس من دائرة الوحدة فإن طوله = $\frac{٣ط}{١١}$ وحدة طول

$\approx \frac{٣}{١١} \times \frac{٢٢}{٧} = \frac{٦}{٧}$ وحدة طول

(٢) إذا كان القوس من دائرة نصف قطرها = ١٤ سم ، فإنه (كما رأينا في الصف الأول)

طول القوس هو ل = $|هـ| \times$ نق (٣ - ١)

حيث $|هـ|$ قياس الزاوية المركزية المقابلة لذلك القوس مقدراً بالراديان .

فيكون طول القوس ل = $\frac{٣ط}{١١} \times ١٤ \approx \frac{٣}{١١} \times \frac{٢٢}{٧} \times ١٤$

= ١٢ سم .

مثال (٣ - ٢) :

أوجد طول القوس من دائرة نصف قطرها ١٠٫٥ سم ، إذا علمت أن القياس الرئيسي للزاوية المركزية المقابلة له هـ = $-\frac{٥ط}{١١}$ راديان . (ط $\approx \frac{٢٢}{٧}$)

الحل :

ل = $\left|-\frac{٥ط}{١١}\right| \times ١٠٫٥ \approx \frac{٥}{١١} \times \frac{٢٢}{٧} \times ١٠٫٥$ = ١٥ سم

مثال (٣ - ٣) :

أوجد ما يساويه الراديان (الزاوية نصف القطرية) بالدرجات وماتساوي الدرجة بالراديان (ط $\approx \frac{٣٥٥}{١١٣}$)

الحل :

تعلم أن العلاقة بين قياسي زاوية ، قياسها بالتقدير الستيني (س°) وقياسها بالتقدير الدائري

(هـ راديان) هي : $\frac{س^\circ}{180^\circ} = \frac{هـ}{ط}$ (٣ - ٢)

فعندما تكون هـ =١ راديان فإن س = $\left(\frac{180^\circ}{ط}\right) \approx 57^\circ\ 17'\ 45''$

وعندما تكون س° = ١°   فإن هـ = $\frac{ط}{180}$ راديان ≈ ٠٫٠١٧٤٥

فالراديان (الزاوية نصف القطرية) ≈ $57^\circ\ 17'\ 45''$

والدرجة   ≈ ٠٫٠١٧٤٥ راديان .

تدريب (٣ - ٤)

١ - تحقق من صحة القياسات الموضحة بالجدول الآتي

الزاوية بالدرجات	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°	١٢٠°	١٣٥°	١٨٠°	٢٧٠°	٣٦٠°
الزاوية بالراديان	$\frac{ط}{6}$	$\frac{ط}{4}$	$\frac{ط}{3}$	$\frac{ط}{2}$	$\frac{2ط}{3}$	$\frac{3ط}{4}$	ط	$\frac{3ط}{2}$	٢ ط

٢ - اكتب القياس العام للزوايا التي قياساتها الرئيسة · $\frac{ط}{6}$ ، $-\frac{ط}{3}$ ، ٧٥° ، - ١٢٠°

مثال (٣ - ٤) :

احسب طول القوس المقابلة لزاوية مركزية قياسها ٢١٠° في دائرة نصف قطرها ٣٣٫٩ سم .   ط ≈ $\frac{355}{113}$

الحل :

ل = | هـ | × نق   حيث هـ مقيسة بالراديان .

$\frac{\text{س}^\circ}{١٨٠} = \frac{\text{هـ}}{\text{ط}}$ $\qquad$ $\text{س} = ٢١٠^\circ$

$\frac{٢١٠}{١٨٠} = \frac{\text{هـ}}{\text{ط}} \Longleftarrow \text{هـ} = \frac{٧\text{ط}}{٦}$ راديان .

$\text{ل} = \frac{٧\text{ط}}{٦} \times ٣٣٫٩ \approx \frac{٧}{٦} \times \frac{٣٥٥}{١١٣} \times ٣٣٫٩ \approx ١٢٤٫٢٥$ سم

مثال (٣ ـ ٥) :

أوجد بالتقديرين الدائري والستيني قياس الزاوية المركزية الموجبة التي تقابل قوساً طوله ١٠سم في دائرة طول نصف قطرها ١٥سم ثم أوجد تعبيراً عاماً لقياسات مجموعة الزوايا المشتركة مع هذه الزاوية في كلٍ من الضلع الابتدائي والضلع النهائي وذلك بالتقديرين الدائري والستيني . $\text{ط} \approx \frac{٢٢}{٧}$

الحل :

$\text{ل} = ١٠$ سم ، نق = ١٥ سم ، $\text{ل} = |\text{هـ}|$ نق

$\Longleftarrow ١٠ = |\text{هـ}| \times ١٥$ $\qquad$ $\text{هـ} > ٠ \Longleftarrow |\text{هـ}| = \text{هـ}$

$\Longleftarrow \text{هـ} = \frac{١٠}{١٥} = \frac{٢}{٣}$ راديان

$= \frac{٢}{٣} \times \frac{١٨٠}{\text{ط}}$

$\approx ١٢٠ \times \frac{٧}{٢٢} \approx ٣٨^\circ\ ١٠'\ ٥٥''$

القياس العام المطلوب :

بالتقدير الدائري : $\{ \frac{٢}{٣} + ٢\text{م ط} : \text{م} \in \text{ص} \}$

بالتقدير الستيني : $\{ ٣٨^\circ\ ١٠'\ ٥٥'' + ٣٦٠^\circ\text{م} : \text{م} \in \text{ص} \}$

تمارين (٣ - ١)

(١) الزاوية الموجهة $\angle$ (م ب $\overleftarrow{}$) في وضع قياسي مرسومة على دائرة الوحدة (د) ، فإذا كان | هـ | أصغر قياس لهذه الزاوية ، وكانت { ب } = (د) $\cap$ [م ب ، ب = (س ، ص) ،

فأكمل مايلي :

(أ) ٠ < هـ < $\frac{ط}{٢}$ $\Longleftrightarrow$ (س > ٠، وَ ص > ٠)

(ب) $\frac{ط}{٢}$ < هـ < ط $\Longleftrightarrow$ (... وَ ...)

(حـ) ط < هـ < $\frac{٣ط}{٢}$ أو: − ط < هـ < − $\frac{ط}{٢}$ $\Longleftrightarrow$ (... وَ ...)

(د) ... < هـ < ... أو: ... < هـ < ... $\Longleftrightarrow$ (س > ٠ وَ ص < ٠)

(هـ) (هـ = ٠ أو هـ = ٢ ط) $\Longleftrightarrow$ ب = (... ، ...)

(و) (هـ = ... أو هـ = $\frac{٣ط}{٢}$) $\Longleftrightarrow$ ب = (... ، ...)

(ز) (هـ = $\frac{ط}{٢}$ أو هـ = $\frac{-٣ط}{٢}$) $\Longleftrightarrow$ ب = (... ، ...)

(ح) (هـ = ط أو هـ = ...) $\Longleftrightarrow$ ب = (... ، ...)

(٢) أكمل الجدول الآتي :

الزاوية بالدرجات	١٥٠°	٢٢٥°		٣٠٠°			٧٥°	١٠٥°	
الزاوية بالراديان			$\frac{٤ط}{٣}$		$\frac{٧ط}{٤}$	$\frac{١١ط}{٦}$			$\frac{٣ط}{١٠}$

(٣) إذا كانت الزاوية $\angle \overleftarrow{\text{أ م ب}}$ في وضع قياسي ، فاكتب تعبيراً عاماً لقياسات هذه الزاوية ، وذلك عندما يكون القياس الرئيسي لهذه الزاوية معطى وفق ما يأتي :

(أ) ق ($\angle \overleftarrow{\text{أ م ب}}$) = ٧٢°
(ب) ق ($\angle \overleftarrow{\text{أ م ب}}$) = $-\frac{٣ط}{٤}$

(حـ) ق ($\angle \overleftarrow{\text{أ م ب}}$) = -٩٠°
(د) ق ($\angle \overleftarrow{\text{أ م ب}}$) = ٣ رادياناً .

(٤) أوجد طول القوس المقابلة للزاوية التي قياسها هـ من دائرة طول نصف قطرها ١٠سم ، في الحالات التالية :

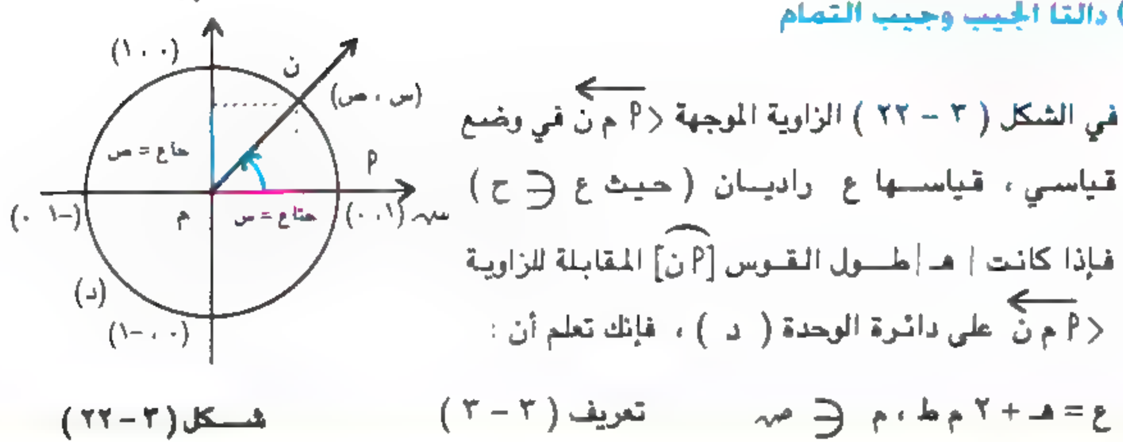
(أ) هـ = $\frac{ط}{٦}$ راديان
(ب) هـ = ١٢٥°

(حـ) هـ = $\frac{٢ط}{٣}$ راديان
(د) هـ = ٣٠َ ٤٥°

(٥) إذا كانت $\angle \overleftarrow{\text{أ م ن}}$ في وضع قياسي ، بحيث : ٠ < ق ($\angle \overleftarrow{\text{أ م ن}}$) < ٢ط ، والدائرة د (م ، ١٠سم) وكان طول القوس [$\overset{\frown}{\text{أ ن}}$] مساوياً ١٥سم .
فأوجد بالتقدير الدائري أصغر قياس للزاوية $\angle \overleftarrow{\text{أ م ن}}$.

٣ - ٣ الدوال الدائرية :

(١) دالتا الجيب وجيب التمام



في الشكل (٣ - ٢٢) الزاوية الموجهة $\angle \overleftarrow{\text{أ م ن}}$ في وضع قياسي ، قياسها ع راديان (حيث ع $\in$ ح) فإذا كانت | هـ | طول القوس [$\overset{\frown}{\text{أ ن}}$] المقابلة للزاوية $\angle \overleftarrow{\text{أ م ن}}$ على دائرة الوحدة (د) ، فإنك تعلم أن :

ع = هـ + ٢ م ط ، م $\in$ ص   تعريف (٣ - ٣)

شكل (٣ - ٢٢)

تعريـف (٣ - ٤)

إذا كانت الزاوية الموجهة < $\overleftarrow{\text{أ م ن}}$ بوضع قياسي ، وقياسها ع ، وكانت ن (س ، ص) نقطــة تقاطع ضلعها النهائي مع دائرة الوحدة (د) فإن العددين س ، ص يتعلـقان بقياس الزاوية < $\overleftarrow{\text{أ م ن}}$ ، ونقول تعريفــاً :

قيمة س هي جيب تمام هذه الزاوية ونرمز له بالرمز حتاع

قيمة ص هي جيب هذه الزاوية ونرمز له بالرمز حاع .

العددان : حتاع ، حاع يسميا ن : العددين المثلثيين للزاوية < $\overleftarrow{\text{أ م ن}}$

وحيث إن العددين حتاع ، حاع يتغيران تبعاً لتغير الزاوية < $\overleftarrow{\text{أ م ن}}$ ، وبالتالي تبعاً لتغـير قياسها ع ، أي تبعاً لموضع النقطة ن على دائرة الوحدة ، لذلك نسمي كلاً منهما **دالـة دائرية** ومن ذلك نستطيع كتابة التعريف الآتي :

تعريـف (٣ - ٥)

الدالة حتا : ح ⟵ ح ، حيث حتا ع = س تسمى دالة جيب التمام

والدالة حا : ح ⟵ ح ، حيث حا ع = ص تسـمى دالة الجـيب

وقد سبق لك التعرف على هاتين الدالتين في مقرر الصف الأول الثانوي في حالة ع ∈ [٠ ، ٩٠°]

نتائج (٣ - ١) :

(أ) في المستوي الموجـه المنسوب إلى نظـام إحداثي متعامد ، إذا كانت < $\overleftarrow{\text{أ م ن}}$ في وضع قياسي ، ق (< $\overleftarrow{\text{أ م ن}}$) = ع ، ن = (س ، ص) : س٢ + ص٢ = ١

فإن : حتاع = س ، حاع = ص

(ب) من النتيجة السابقة ينتج مباشرة أن :

$$-1 \leqslant \text{حتا} ع \leqslant 1$$
$$-1 \leqslant \text{حا} ع \leqslant 1 \qquad (3-3)$$

كما ينتج أنه

لكل ع $\in$ ح $\qquad$ (حتا ع)^2 + (حا ع)^2 = 1

وتكتب بالشكل

$$\text{حتا}^2 ع + \text{حا}^2 ع = 1 \qquad (3-4)$$

(حـ) بالرجـوع إلى الشكل (٣ - ٢٢) يمكنك أن تستنتج بسهولة أن :

حتا ٠ = ١	حا ٠ = ٠
حتا ٢ ط = ١	حا ٢ ط = ٠
حتا $\frac{ط}{2}$ = ٠	حا $\frac{ط}{2}$ = ١
حتا ط = -١	حا ط = ٠
حتا ($-\frac{ط}{2}$) = حتا $\frac{3ط}{2}$ = ٠	حا ($-\frac{ط}{2}$) = حا $\frac{3ط}{2}$ = -١

(د) حيث إن { ع = هـ + ٢ م ط م $\in$ صـ } هي مجموعة قياسات الزاوية التي ضلعها الابتدائي [م أ وضلعها النهائي [م ن ، وبالرجوع إلى الشكل (٣ - ٢٢) تجد أن :

$$\text{حتا} (هـ + 2 م ط) = \text{حتا} هـ ، م \in صـ$$
$$\text{حا} (هـ + 2 م ط) = \text{حا} هـ ، م \in صـ \qquad (3-5)$$

مثال (٣ - ٦) :

عبّر بدلالة أصغر قياس موجب للزاوية ‎$\angle$ ‏ ‍ﺃ م ن‎ عن كلٍ من حتا ع، حا ع حيث ع = ق ‏($\angle$ ﺃ م ن) ،

إذا كانت إحدى قيم ع معطاة كما يلي :

(ﺃ) ع = ٤٣٠°   (ب) ع = $\frac{٥}{٢}$ ط

(حـ) ع = - ٤٠° + ٣٦٠° م ، م ∈ ص

الحل :

(ﺃ) ع = ٤٣٠° = ٧٠° + ٣٦٠° فيكون :

حتا ع = حتا (٧٠° + ٣٦٠°) = حتا ٧٠°

حا ع = حا (٧٠° + ٣٦٠°) = حا ٧٠°

(ب) ع = $\frac{٥}{٢}$ ط = $\frac{ط}{٢}$ + ٢ ط

حتا ع = حتا ($\frac{ط}{٢}$ + ٢ ط) = حتا $\frac{ط}{٢}$ = ٠ .

حا ع = حا ($\frac{ط}{٢}$ + ٢ ط) = حا $\frac{ط}{٢}$ = ١

(حـ) ع = - ٤٠° + ٣٦٠م م ∈ ص

نحصل على أصغر قياس موجب عندما نضع م = ١

⇐ ع = - ٤٠° + ٣٦٠° = ٣٢٠° ، فيكون :

حتا ع = حتا ٣٢٠° ، حا ع = حا ٣٢٠° .

تدريب (٣ - ٥)

(١) الزاوية الموجهة ‎$\angle$ ﺃ م ب في وضع قياسي

إذا علمت أن ق ($\angle$ ﺃ م ب) = ع فعبر عن كلٍ من حتا ع وحا ع بدلالة أصغر قياس موجب للزاوية $\angle$ ﺃ م ب في كلٍ من الحالات الآتية :

(ﺃ) ع = ٤٠° + ٣٦٠°م ، م ∈ ص

(ب) ع = -٥٠° + ٣٦٠°م ، م ∈ ص

(حـ) $ع = -\frac{ط}{٢} + ٢ ط م$ ، $م \in ص$

(د) $ع = \frac{٥ط}{٧} + ٢ ط م$ ، $م \in ص$

(٢) إذا كانت حتاع = ٠ فما هي قيم ع ، $ع \in [٠ ، ٢ ط]$ ؟

(٣) أعد السؤال السابق حيث $ع \in ح$

(٤) أعد حل التمرينين (٢) ، (٣) في حالة حاع = ٠

(٢) دالة الظل :

لنتعرف على العدد الحقيقي $\frac{ص}{س} = \frac{حاع}{حتاع}$

من الواضح أن وجود هذا العدد يقتضي كون $س \neq ٠$ أي : $حتاع \neq ٠$.

لو قمت بحل التمرين (٣) من التدريب (٣ – ٥) لوجدت أن :

$حتاع \neq ٠ \Longleftarrow$
$ع \neq \frac{ط}{٢} + ٢ م ط$ ، $م \in ص$ (١)
$ع \neq \frac{٣ط}{٢} + ٢ م ط$ ، $م \in ص$ (٢)

ومن الواضح أن الشرط (٢) يكتب :

$ع \neq \frac{ط}{٢} + ط + ٢ م ط$ أو $ع \neq \frac{ط}{٢} + (١ + ٢ م) ط$. (٢)

والشرط (١) يكتب $ع \neq \frac{ط}{٢} + (٢م) ط$ (١)

فالشرط (٢) يعني أن : $ع \neq \frac{ط}{٢}$ + عدد فردي من ط

والشرط (١) يعني أن : $ع \neq \frac{ط}{٢}$ + عدد زوجي من ط

وعلى هذا يمكن جمع الشرطين بشرط واحد هو :

$$ع \neq \frac{ط}{٢} + م ط \quad ، \quad م \in ص .$$

تعريـــــف (٣ – ٦) :

نسمي العدد الحقيقي $\frac{حاع}{حتاع}$ (حيث $ع \neq \frac{ط}{٢} + م ط ، م \in ص$)
ظل الزاوية $\overleftarrow{< ٯ م ن}$ باعتبار ق ($\overleftarrow{< ٯ م ن}$) = ع ونرمز له ظاع فيكون :
ظاع = $\frac{ص}{س}$ ، حيث ن = (س ، ص) ، $س^٢ + ص^٢ = ١$ انظر الشكل (٣ – ٢٢)

وبالطريقة نفسها التي سلكناها في حتا ع ، جا ع نقول :

تعريف (٣-٧)

نعرف الدالة الدائرية ظا ع كما يلي :

ظا : ح - { ع = $\frac{ط}{٢}$ + م ط : م ∈ ص } ⟵ ح

حيث ظا ع = $\frac{جا ع}{حتا ع}$ (٣-٦)

نتائج (٣ - ٢)

(أ) من النتيجة (٣ -١ / حـ) نجد أن :

ظا ٠ = $\frac{جا ٠}{حتا ٠}$ = $\frac{٠}{١}$ = ٠

ظا (ط) = ظا (- ط) = ٠

ونستطيع أن نلاحظ بسهولة أن كلاً من

ظا $\frac{ط}{٢}$ ، ظا $\frac{٣ط}{٢}$ ، ظا $\frac{-ط}{٢}$ ، . . . . . . ، ظا ($\frac{ط}{٢}$ + م ط) : م ∈ ص ، غير معرفة

(ب) من النتيجة (٣ - ١ /د) ينتج أنه إذا كان هـ ≠ $\frac{ط}{٢}$ + م ط (م ∈ ص)

فإن ظا (هـ + ٢ م ط) = ظا هـ ، م ∈ ص

مثال (٣ - ٧) :

عبِّر عن ظا ع بدلالة أصغر قياس موجب للزاوية < أ م ن ، إذا كانت ع = ق (< أ م ن) في الحالتين التاليتين :

(أ) ع = ٣٧٠°

(ب) ع = $\frac{٧ط}{٣}$

الحل :

(أ) ع = 370° = $10^\circ + 360^\circ$ ، ظا ع = ظا ($10^\circ + 360^\circ$) = ظا 10°

(ب) ع = $\frac{7ط}{3}$ = $\frac{ط}{3}$ + ٢ ط ، ظا ع = ظا ($\frac{ط}{3}$ + ٢ ط) = ظا $\frac{ط}{3}$

(٣) دوال دائرية أخرى

تعريف (٣-٨)

نعرف فيما يلي الدوال التالية :

(١) القاطع ونرمز له بالرمز قا ع ويكون :

قا ع = $\frac{1}{\text{حتا ع}}$ ، ع $\neq \frac{ط}{2}$ + م ط ، م $\in$ ص

(٢) قاطع التمام ، ونرمز له بالرمز قتا ع ويكون :

قتا ع = $\frac{1}{\text{حا ع}}$ ، ع $\neq$ م ط ، م $\in$ ص .

(٣) ظل التمام ونرمز له بالرمز ظتا ع ويكون :

ظتا ع = $\frac{1}{\text{ظا ع}}$ (٣ - ٧)

= $\frac{\text{حتا ع}}{\text{حا ع}}$ ، ع $\neq$ م ط ، م $\in$ ص

ملحوظة (٣ - ٤)

حيث إن حا ع في مقام كلٍ من قتا ع ، ظتا ع ، لذا يجب أن يكون حا ع $\neq$ ٠ ونعلم أن

حا ع = ٠ عندما ع = ٠ + ٢ م ط = (٢م) ط (١)

وعندما ع = ط + ٢ م ط = (١ + ٢ م) ط (٢)

إن (١) يمثل مجموعة الأعداد الزوجية من ط

إن (٢) يمثل مجموعة الأعداد الفردية من ط

وعليه فإن (١) ، (٢) معاً نعبر عنهما بقولنا ع = م ط حيث م ∈ صـ

لذلك فإن الشرط حا ع ≠ ٠ ⟸ ع ≠ م ط م ∈ صـ

وهذا ما اشترطناه في الفقرتين (٢) ، (٣) من التعريف السابق .

نتيجة (٣ - ٣)

نستنتج بسهولة أن :

قا (هـ + ٢ م ط) = قا هـ

قتا (هـ + ٢ م ط) = قتا هـ

ظتا (هـ + ٢ م ط) = ظتا هـ

(٤) قاعدة الإشارات

رأينا أنه : لأي نقطة ن (س ، ص) واقعة على دائرة الوحدة فإن حتا ع = س ، حا ع = ص ، انظر الشكل (٣ - ٢٣) لذا فإننا نستطيع أن نسمي المحور م سـ ، في هذه الحالة ، محور جيب التمام كما نسمي المحور م صـ محور الجيب وهذا يعني أن :

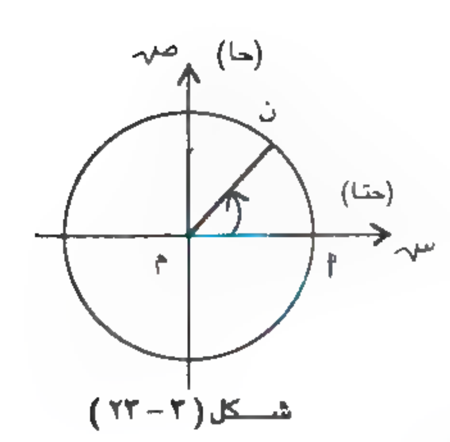
إشارة حتا ع هي إشارة س نفسها

وإشارة حا ع هي إشارة ص نفسها

فإذا كانت الزاوية التي قياسها ع في الربع الأول .

فإن ${س > ٠ ، ص > ٠}$ ⟸ ${حتا ع > ٠ ، حا ع > ٠}$

وبالتالي فإن ظا ع = $\frac{حا ع}{حتا ع} = \frac{ص}{س} > ٠$.



شكل (٣ - ٢٣)

وإذا كانت الزاوية التي قياسها ع في الربع الثاني فإن

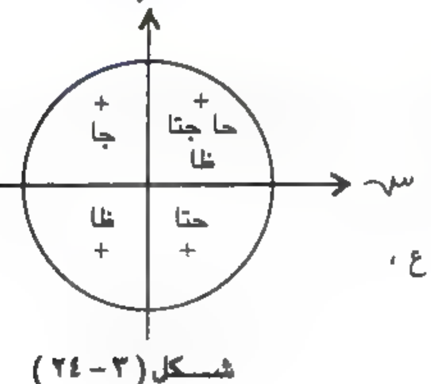
${س < ٠ ، ص > ٠}$ ⟸ ${حتا ع < ٠ ، حا ع > ٠}$ ⟸ ظا ع < ٠

وهكذا . . . .

والشكل (٣ - ٢٤) يبين الدوال التي إشاراتها موجبة في كلٍ من الأرباع الأربعة ، وما سواها سالب ، وذلك بالنسبة لكلٍ من جا ع ، جتا ع ، ظا ع .

ولعلك تلاحظ أن إشارة قا ع مثل إشارة جتا ع ،

وإشارة قتا ع مثل إشارة جا ع وإشارة ظتا ع مثل إشارة ظا ع .



شكل (٣ - ٢٤)

تدريب (٣ - ٦)

أوجد إشارة كل من جتا ع ، جا ع ، ظا ع ، قا ع ، قتا ع ، ظتا ع ،

إذا علمت أن الزاوية التي قياسها ع .

(١) في الربع الثالث .

(٢) في الربع الرابع .

مثال (٣ - ٨)

الزاوية الموجهة $\angle \overleftarrow{\text{ا م ن}}$ في وضع قياسي ، (د) دائرة الوحدة ، ا ، ن $\in$ (د) . فإذا كانت ا (١ ، ٠) ، ن (س ، $\frac{٣}{٥}$) ، ٠ < ق ($\angle \overleftarrow{\text{ا م ن}}$) < ٢ ط ، فأثبت أنه توجد قيمتان لـ س وعين على الشكل الزاويتين المقابلتين لهما ثم أوجد في كل حالة النسب المثلثية لهذه الزاوية .

الحل :

ن (س ، $\frac{٣}{٥}$) $\in$ (د)

$\Leftarrow$ س^٢ + ص^٢ = ١

$\Leftarrow$ س^٢ + $\frac{٩}{٢٥}$ = ١

$\Leftarrow$ س = $\pm$ $\frac{٤}{٥}$

$\Leftarrow$ وجود نقطتين على دائرة الوحدة هما

ن$_١$ ($\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$) ، ن$_٢$ ($-\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$)

انظر الشكل (٣ - ٢٥)

ص
($-\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$)
ن$_٢$
ن$_١$ ($\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$)
هـ$_٢$
هـ$_١$
س
م
ا

شكل (٣ - ٢٥)

$\Leftarrow$ يوجد زاويتان : ($\overleftarrow{\text{م ن}_1}$ >أ ، $\overleftarrow{\text{م ن}_2}$ >أ)

بحيث ق ($\overleftarrow{\text{م ن}_1}$ >أ) = $هـ_1$ ، ق ($\overleftarrow{\text{م ن}_2}$ >أ) = $هـ_2$ ، $هـ_1$ ، $هـ_2$ $\in$ [٠ ، ٢ ط]

فيكون :

(حتا $هـ_1$ ، حا$هـ_1$) = ($\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$) ، (حتا $هـ_2$ ، حا$هـ_2$) = ($-\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$)

وبالتالي فإن

حتا $هـ_1$ = $\frac{٤}{٥}$ ، حا $هـ_1$ = $\frac{٣}{٥}$ $\Leftarrow$ { ظا $هـ_1$ = $\frac{٣}{٤}$

حتا$هـ_2$ = $-\frac{٤}{٥}$ ، حا $هـ_2$ = $\frac{٣}{٥}$ $\Leftarrow$ { ظا $هـ_2$ = $-\frac{٣}{٤}$

وإن

قا$هـ_1$ = $\frac{٥}{٤}$ ، قتا $هـ_1$ = $\frac{٥}{٣}$ ، ظتا $هـ_1$ = $\frac{٤}{٣}$ (لماذا ؟)

قا$هـ_2$ = $-\frac{٥}{٤}$ ، قتا $هـ_2$ = $\frac{٥}{٣}$ ، ظتا $هـ_2$ = $-\frac{٤}{٣}$ (لماذا ؟)

(٥) المتطابقات الأساسية

سبق أن تعرفت في النتيجة (٣ - ١ / ب) والتعريف (٣ - ٧) على المتطابقتين

$حا^2 ع + حتا^2 ع = ١$ لكل ع $\in$ ح (٣ - ٤)

$\frac{حا ع}{حتا ع}$ = ظا ع لكل ع $\in$ ح - { $\frac{ط}{٢}$ + م ط م $\in$ ص} (٣ - ٦)

إن المتطابقتين السابقتين تدعيان : المتطابقتين الأساسيتين لحساب المثلثات ، ونستنتج منهما متطابقتين أخريين فيما يلي :

نظرية (٣ - ١)

لأي زاوية موجهة قياسها ع فإن

(١) $١ + ظا^2 ع = \frac{١}{حتا^2 ع} = قا^2 ع$ ، ع $\neq$ $\frac{ط}{٢}$ + م ط ، م $\in$ ص (٣ - ٨)

(٢) $١ + ظتا^2 ع = \frac{١}{حا^2 ع} = قتا^2 ع$ ، ع $\neq$ م ط ، م $\in$ ص (٣ - ٩)

البرهـــان

(١) $\text{١} + \text{ظا}^{\text{٢}}\text{ع} = \text{١} + \frac{\text{حا}^{\text{٢}}\text{ع}}{\text{حتا}^{\text{٢}}\text{ع}} = \frac{\text{حتا}^{\text{٢}}\text{ع} + \text{حا}^{\text{٢}}\text{ع}}{\text{حتا}^{\text{٢}}\text{ع}} = \frac{\text{١}}{\text{حتا}^{\text{٢}}\text{ع}} = \left(\frac{\text{١}}{\text{حتا ع}}\right)^{\text{٢}} = \text{قا}^{\text{٢}}\text{ع}$

(٢) برهان الفقرة الثانية متروك للطالب .

تدريب (٣ - ٧)

(١) بسّط مايلي :

(أ) $\frac{\text{حا ع}}{\text{ظا ع}}$ (ب) $\frac{\text{١}}{\text{حتا}^{\text{٢}}\text{ع}} - \text{١}$

(حـ) حتاع + حاع . ظاع (د) $\frac{\text{١}}{\text{١} + \text{حا ع}} + \frac{\text{١}}{\text{١} - \text{حا ع}}$

(٢) أثبت أن : $\text{حا}^{\text{٢}}\text{ع} = \frac{\text{ظا}^{\text{٢}}\text{ع}}{\text{١} + \text{ظا}^{\text{٢}}\text{ع}}$

(٣) برهن على صحة الفقرة (٢) من النظرية (٣ - ١)

مثال (٣ - ٩)

إذا كانت ٠ < هـ < ٢ ط ، ظا هـ = ١ فالمطلوب

(١) أثبت وجود قيمتين هـ١ ، هـ٢ للزاوية هـ .

(٢) أوجد في كل حالة : حاهـ ، حتاهـ .

(٣) أوجد النقطتين ن١ ، ن٢ على دائرة الوحدة ، الناتجتين عن تقاطعها مع الضلع النهائي للزاوية < أ م ن (←) في كلٍ من الحالتين السابقتين ، إذا علمت أن الزاوية في وضعٍ قياسي ماهي العلاقة بين القيمتين هـ١ ، هـ٢ ؟

الحل :

(١) ظا هـ = ١ > ٠ ⟸ هـ تمثل زاوية في الربع الأول أو في الربع الثالث ، وليكن القياس الأول هـ١ والقياس الثاني هـ٢ ، انظر الشكل (٣ - ٢٦)

(٢) $١ + ظا^٢ هـ = \frac{١}{حتا^٢ هـ}$ (٣ - ٨)

$\Leftarrow ١ + (١)^٢ = \frac{١}{حتا^٢ هـ} \Leftarrow حتا^٢ هـ = \frac{١}{٢}$

$\Leftarrow$ حتا هـ $= \pm \frac{١}{\sqrt{٢}}$ فعندما تكون الزاوية بالربع الأول : هـ = $هـ_١$

فإن حتا $هـ_١ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، حا $هـ_١$ = حتا $هـ_١$ × ظا $هـ_١ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ (لماذا ؟)

وعندما تكون الزاوية بالربع الثالث هـ = $هـ_٢$

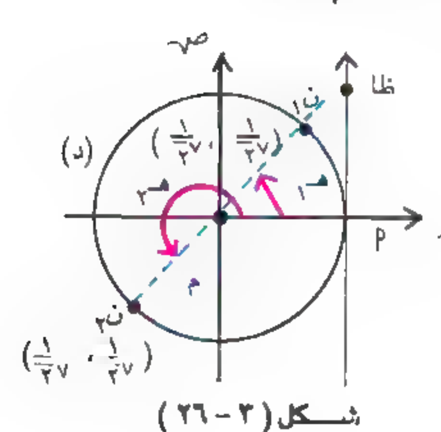
فإن حتا $هـ_٢ = - \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، حا $هـ_٢ = - \frac{١}{\sqrt{٢}}$ (لماذا ؟)

(٣) $ن_١ = (\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}})$ ، $ن_٢ = (- \frac{١}{\sqrt{٢}} ، - \frac{١}{\sqrt{٢}})$

شكل (٣ - ٢٦)

$\Leftarrow$ $ن_١$ ، $ن_٢$ متناظرتان بالنسبة لنقطة الأصل م

$\Leftarrow$ $هـ_٢ - هـ_١$ = ط .



شكل (٣ - ٢٦)

ملحوظة (٣ - ٥)

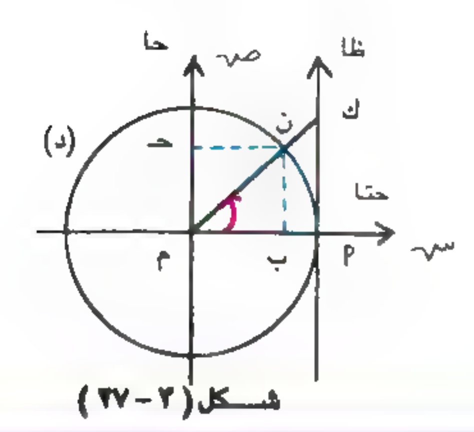
في الشكل (٣ - ٢٧) الزاوية الموجهة < $\overleftarrow{أ م ن}$ في

وضع قياسي ، ق (< $\overleftarrow{أ م ن}$) = ع ، ع ∈ ح ،

أ ، ن تنتميان إلى دائرة الوحدة .

(د) ، المماس في أ يلاقي الضلع النهائي للزاوية في ك .

لعلك تستنتج من تشابه المثلثين م ب ن ، أ م ك .



شكل (٣ - ٢٧)

إن : $\frac{|\text{ب ن}|}{|\text{م ب}|} = \frac{|\text{أ ك}|}{|\text{م أ}|}$ ، وبملاحظة أن :

|م حـ| = |ب ن| ، وباعتبار القطع ، المستقيمة موجهة يصبح التناسب السابق :

$$\frac{\overline{\text{م حـ}}}{\overline{\text{م ب}}} = \frac{\overline{\text{أ ك}}}{\overline{\text{م أ}}} \Longleftarrow \frac{\text{حا ع}}{\text{حتا ع}} = \frac{\overline{\text{أ ك}}}{1}$$

أو : ظا ع = $\overline{\text{أ ك}}$

أي أن ظا ع تتعين قيمتها بالعدد الذي يقيس إحداثي لنقطة ك على المحور المنطبق على مماس دائرة الوحدة في أ ، والموجه كاتجاه محور الصادات ، حيث ك نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية > أ م ن مع ذلك المماس . المحور أ ك نسميه محور الظل .

تدريب (٣ - ٨)

أعد رسم الشكل (٣ - ٢٦) وارسم عليه محور الظل ثم حدد عليه النقطة ك التي إحداثيها يساوي كلاً من ظا هـ١ ، ظا هـ٢ ، ماذا تلاحظ ؟

مثال (٣ - ١٠) :

إذا كان قياس زاوية موجهة تقع في الربع الثالث يساوي هـ وكان |حتا هـ| = $\frac{٥}{١٣}$ فأوجد كلاً من : حتا هـ ، حا هـ ، ظا هـ .

الحل :

|حتا هـ| = $\frac{٥}{١٣}$ ، الزاوية تقع في الربع الثالث ⟸ حتا هـ < ٠ ⟸ حتا هـ = $-\frac{٥}{١٣}$

حتا^{٢}هـ + حا^{٢}هـ = ١ ⟸ حا^{٢}هـ = ١ - حتا^{٢}هـ = ١ - $\frac{٢٥}{١٦٩}$

⟸ حا هـ = ± $\frac{١٢}{١٣}$ لكن حا هـ < ٠ (لماذا ؟)

⟸ حا هـ = $-\frac{١٢}{١٣}$ ظا هـ = $\frac{\text{حا هـ}}{\text{حتا هـ}}$ = $\frac{١٢}{٥}$

تمارين (٣ − ٢)

(١) إذا كانت ٣ حاهـ = ٤ حتاهـ ، ٠ < هـ < $\frac{\text{ط}}{٢}$ فاحسب كلاً من حاهـ ، حتاهـ ، ظاهـ .

(٢) أعد حل المسألة السابقة إذا علمت أن ط < هـ < $\frac{٣\text{ط}}{٢}$.

(٣) إذا كانت حاهـ = −$\sqrt{٣}$ حتاهـ ، $\frac{٣\text{ط}}{٢}$ < هـ < ٢ط فاحسب كلاً من ظاهـ ، حتاهـ ، حاهـ .

(٤) إذا كانت ١٣حتا هـ + ٥ = ٠ ، ٠ < هـ < ٢ ط فأوجد كلاً من حتاهـ ، حاهـ ، ظاهـ

(لاحظ وجود حلّين)

(٥) إذا كانت | ظاهـ | = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، هـ قياس زاوية تقع في الربع الرابع ، فأوجد كلاً من ظا هـ ، حا هـ ، حتا هـ ، قتا هـ ، قا هـ ، ظتا هـ .

(٦) إذا كانت هـ أقل قياس لزاوية موجهة في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة ، فعين إشارة كلٍ من : حتا هـ − ٣ ، $\frac{٣}{٢}$ − حا هـ ، ٣ حا هـ − ٤ .

هل يمكن أن يكون ٣ حا هـ − ٤ = ٠ ؟ لماذا ؟ .

(٧) إذا كانت ٤ حا^{٢}هـ − ٨ حاهـ + ٣ = ٠ ، فأوجد قيمة حاهـ وإذا كانت $\frac{\text{ط}}{٢}$ < هـ < ط فأوجد قيمة كلٍ من حتا هـ ، ظتا هـ .

(٨) أثبت أن النقطة ن ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، − $\frac{١}{٢}$) تقع على دائرة الوحدة ، وإذا مر بالنقطة ن الضلع النهائي لزاوية موجهة ، في وضع قياسي وكان قياسها هـ فأوجد قيمة كلٍ من حتا هـ ، حا هـ ، ظا هـ .

(٩) في المسألة السابقة ، إذا كانت ن (س ، − $\frac{٣}{٥}$) ، ٠ < هـ < ٢ ط ، فأوجد س وبين أنه توجد قيمتان لقياس هـ ، ثم أوجد في كل مرة : حا هـ ، قا هـ ، ظتا هـ .

(١٠) أعد المسألة السابقة بفرض ن ($\frac{٣}{٥}$ ، ص) ، $\frac{-ط}{٢}$ < هـ < $\frac{ط}{٢}$

في التمارين من (١١) إلى (١٦) إذا عرفت أحد قيم الدوال المثلثية : حا هـ ، حتا هـ ، ظا هـ ظتا هـ للزاوية التي قياسها هـ فأوجد بقية القيم ، فيما يلي :

(١١) حا هـ = $\frac{٤}{٥}$ ، حتا هـ < ٠ (١٤) حتا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ظتاهـ < ٠

(١٢) حتا هـ = $-\frac{٣}{٥}$ ، حا هـ < ٠ (١٥) ظتا هـ = $\sqrt{٣}$ ، حاهـ < ٠

(١٣) ظا هـ = - ١ ، حا هـ < ٠ (١٦) حا هـ = $\frac{\sqrt{٦}+\sqrt{٢}}{٤}$ ، حتاهـ < ٠

بسط مايلي :

(١٧) $\frac{\text{ظتاهـ}}{\text{حتاهـ}}$ (١٨) $\frac{١ + \text{ظتا}^٢\text{هـ}}{١ + \text{ظا}^٢\text{هـ}}$ (١٩) حا هـ + حتا هـ . ظتا هـ

برهن على صحة مايلي :

(٢٠) حا^{٢}ب (١ + ظتا^{٢}ب) + حتا^{٢}ب (١ + ظا^{٢}ب) = ٢

(٢١) (حا ب حتاحـ + حتا ب حا حـ)^٢ + (حتا ب حتا حـ - حا ب حاحـ)^٢ = ١

(٢٢) ٢ (١ + حا P) (١ + حتا P) = (١ + حا P + حتا P)^٢

(٢٣) إذا كانت سـ = { - ١ ، ١ } وعرّفنا عليها العملية * كما يأتي :

س * ص = س $\sqrt{١ - \text{ص}^٢}$ + ص $\sqrt{١ - \text{س}^٢}$ لكل س ، ص ∈ سـ

فاثبت أن * عملية ثنائية على سـ .

٣ - ٤ تبسيط بعض قيم الدوال الدائرية

بالرجوع إلى النتيجة (٣-١/د) والنتيجة (٣-٢/ب) ، نعلم أنه :

لأي زاوية موجهة قياسها ع فإن :

حتا (ع + ٢ م ط) = حتا ع

حا (ع + ٢م ط) = حا ع

وإذا كانت ع ≠ $\frac{ط}{٢}$ + م ط فإن : ظا(ع + ٢م ط) = ظا ع

م ∈ صـ (٣-١٠)

سنبحث في هذه الفقرة عن قواعد أخرى لتبسيط قيم الدوال المثلثية

نظريــة (٣ - ٢)

لأي زاوية موجهة قياسها ع فإن :

(حتا (ط - ع) ، حا (ط - ع)) = (- حتاع ، حاع)

البرهــان

في الشكل (٣ - ٢٨) الدائرة (د) هي دائرة الوحدة ن (حتاع ، حاع) = ن (س ، ص)

نرسم الوتر [ن نَ] ⊥ المحور ص فيكون :

نَ (- س ، ص)

= نَ (- حتاع ، حـاع) (لماذا ؟) (١)

واضح أن ق (∢ أ م نَ) = ط - ع

فتكون نَ (حتا (ط - ع) ، حا (ط - ع)) (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

(حتا (ط - ع) ، حا (ط - ع)) = (- حتاع ، حاع)

أي أن :

حتا (ط - ع) = - حتاع

حا (ط - ع) = حاع

وبفرض ع $\neq \frac{ط}{٢}$ + م ط ، م ∈ ص :

ظا (ط - ع) = - ظاع

(٣ - ١١)

شـــكل (٣ - ٢٨)

نظـرية (٣ - ٣)

لأي زاوية موجهة قياسها ع فإن :

(حتا (ط + ع) ، حا (ط + ع)) = (- حتاع ، - حاع)

البرهــان

على دائرة الوحدة (د) في الشكل (٣ - ٢٩)

ن (حتاع ، حاع) = ن (س ، ص)

ولدينا ن نَ ⋂ (د) = { ن ، نَ }

ومن الواضح أن :

نَ (حتا (ط + ع) ، حا (ط + ع)) (١)

وأن : نَ (- س ، - ص) (لماذا ؟)

أي أن : نَ (- حتاع ، - حاع) (٢)

شـــكل (٣ - ٢٩)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

(حتا (ط + ع) ، حا (ط + ع)) = (- حتاع ، - حاع)

أي أن :

حتا (ط + ع) = - حتاع
حا (ط + ع) = - حاع
ويفرض ع $\neq \frac{ط}{٢}$ + م ط ، م ∈ ص
ظا (ط + ع) = ظاع (لماذا ؟)

(٣ - ١٢)

تدريب (٣ - ٩)

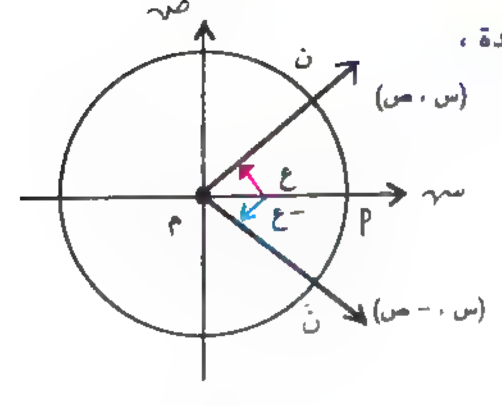
أعـد رســم الشـكل (٣ - ٢٩) ثـم ارسـم علـيه محـور الظـل واسـتعن بـه لتتحقـق أن ظا (ع + ط) = ظاع

نظرية (٣ – ٤)

لأي زاوية موجهة قياسها ع فإن :

(حتا (– ع) ، حا (– ع)) = (حتاع ، – حاع)

البرهــان



شــكل (٣ – ٣٠)

لو استعنت بالشكل (٣ – ٣٠) حيث (د) دائرة الوحدة ،

[ن نَ] ⊥ المحور سـ لوجدت أن .

ن (حتاع ، حاع) = ن (س ، ص)

وأن نَ (س ، – ص) (لماذا؟)

وبالتالي فإن : نَ (حتاع ، – حاع) (١)

وحيث إن ق ($\overleftarrow{\angle P \text{ م } \text{نَ}}$) = –ع (لماذا؟)

فإن : نَ (حتا (–ع) ، حا(–ع)) (٢)

من (١) ، (٢) ينتج المطلوب ومنه نجد :

حتا (– ع) = حتاع حا (– ع) = – حاع وبفرض ع $\neq \frac{ط}{٢}$ + م ط ، م ∈ ص ظا (–ع) = – ظاع (لماذا؟)	(٣ – ١٣)

تدريب (٣ – ١٠)

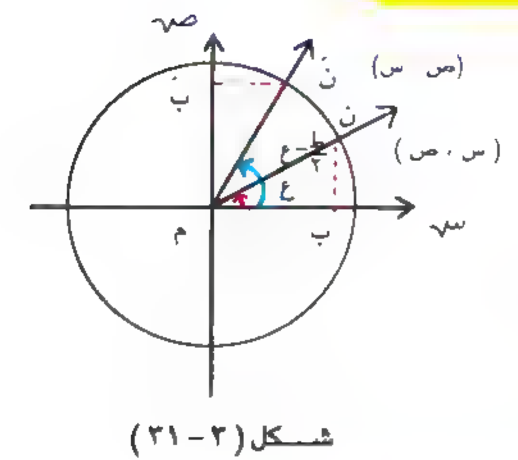
أعد رسم الشكل (٣ – ٣٠) ثم ارسم عليه محور الظل واستعن به لتتحقق أن :

ظا (–ع) = – ظا ع

نظرية (٣ – ٥)

لأي زاوية موجهة قياسها ع فإن :

(حتا ($\frac{ط}{٢}$ – ع) ، حا ($\frac{ط}{٢}$ – ع)) = (حا ع ، حتا ع)



شكل (٣ – ٣١)

لو استعنت بالشكل (٣ – ٣١) حيث (د) دائرة الوحدة لوجدت أن

ن (حتا ع ، حا ع) = ن (س ، ص)

ن َ (حتا ($\frac{ط}{٢}$ – ع) ، حا ($\frac{ط}{٢}$ – ع)) (١)

ومن تطابق المثلثين م ب ن ، م ب َ ن َ (لماذا ؟)

نجد : ن َ (ص، س) أي أن ن َ (حا ع ، حتا ع) (٢)

من (١) ، (٢) ينتج المطلوب . ومنه نجد :

حتا ($\frac{ط}{٢}$ – ع) = حا ع

حا ($\frac{ط}{٢}$ – ع) = حتا ع

وبفرض ع ≠ م ط ، م ∈ ص

ظا ($\frac{ط}{٢}$ – ع) = ظتا ع لماذا ؟

(٣ – ١٤)

نظرية (٣ – ٦)

لأي زاوية موجهة قياسها ع فإن :

(حتا ($\frac{ط}{٢}$ + ع) ، حا($\frac{ط}{٢}$ + ع)) = (– حا ع ، حتا ع)

البرهـــان

متروك للطالب مستعيناً بالشكل (٣ – ٣٢) وعليه يكون

حتا $(\frac{ط}{٢} + ع)$ = − حاع

حا $(\frac{ط}{٢} + ع)$ = حتاع

ويفرض ع ≠ م ط : م ∋ ص : (٣ − ١٥)

طا $(\frac{ط}{٢} + ع)$ = − ظتاع

شـكل (٣-٣٢)

تدريب (٣ - ١٤)

(١) علل اشتراطنا أن ع ≠ م ط ، م ∋ ص في كلٍ من القاعدتين (٣ − ١٤) ، (٣ − ١٥)

(٢) برهن على صحة النظرية (٣ − ٦) . (إرشاد أثبت تطابق المثلثين م ب ن ، نَ حـ م)

مثال (٣ ١٢) :

بسّط قيم الدوال الدائرية التالية :

(أ) حتا $(\frac{٣ط}{٢} + ع)$ ، حا $(\frac{٣ط}{٢} + ع)$ ، ظا $(\frac{٣ط}{٢} + ع)$

(ب) حتا $(\frac{٣ط}{٢} - ع)$ ، حا $(\frac{٣ط}{٢} - ع)$ ، ظا $(\frac{٣ط}{٢} - ع)$

الحل :

(ρ) حتا$(\frac{٣ط}{٢} + ع)$ = حتا $(\frac{ط}{٢} + (ط + ع))$

= − حا (ط + ع) القاعدة (٣ − ١٥)

= − (− حاع) القاعدة (٣ − ١٢)

= حـاع

وبطريقة مشابهة نجد أن حا $(\frac{٣ط}{٢} + ع)$ = − حتاع

وبالتالي فإن ظا $(\frac{٣ط}{٢} + ع)$ = − ظتاع (لماذا ؟)

(ب) حتا $\left(\frac{٣ط}{٢} - ع \right)$ = حتا $\left(\frac{ط}{٢} + (ط - ع) \right)$.

= − حا (ط − ع) (لماذا ؟)

= − حاع

حا $\left(\frac{٣ط}{٢} - ع \right)$ = − حتاع
ظا $\left(\frac{٣ط}{٢} - ع \right)$ = ظتاع
} البرهان متروك للطالب

ملحوظة (٣ - ٦)

في براهين القواعد من (٣ − ١٠) إلى (٣ − ١٥) اعتبرنا (٠ < ع < $\frac{ط}{٢}$) تسهيلاً على الطالب وإن هذه القواعد تبقى صحيحة مهما كانت قيمة ع ، وبالتالي فإن هذه القواعد هي متطابقات

تدريب (٣ - ١٢)

(١) حاول أن تتذكر القيم الخاصة للدوال المثلثية التي تعلمتها في مقرر الصف الأول الثانوي ، ثم أضف إليها ماتعلمته في البند (٣ − ٣) ثم أكمل الجدول التالي :

هـ / الدالة	٠	$\frac{ط}{٦}$ = ٣٠°	$\frac{ط}{٤}$ = ( )°	$\frac{ط}{٣}$ = ( )°	$\frac{ط}{٢}$ = ٩٠°	ط = ( )°	$\frac{٣ط}{٢}$ = ( )°	٢ط = ٣٦٠°
حا هـ	٠	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = —					
حتا هـ	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	— = —					
ظا هـ	٠	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{-}{٣}$			غير معرف			

(٢) أكتب قيمة كل من قا هـ ، قتا هـ ، ظتا هـ ، إذا كانت :

(ا) هـ = $\frac{ط}{٦}$ (ب) هـ = $\frac{ط}{٤}$ (حـ) هـ = $\frac{ط}{٣}$

(د) هـ = $\frac{٣ط}{٢}$ (هـ) هـ = ط   (و) هـ = ٢ ط

(٣) أثبت صحة مايلي :

(ا) حا ٩٠° حا ٣٠° + ظا ٤٥° قتا ٣٠° = $\frac{٥}{٢}$

(ب) قا $\frac{ط}{٣}$ ظتا $\frac{ط}{٤}$ + ٤ حتا $\frac{ط}{٣}$ حا $\frac{ط}{٦}$ = ٣

مثال (٣ – ١٣) :

احسب : حاع ، حتاع ، ظاع ، إذا كان : (ا) ع = ٢٢٥° ، (ب) ع = – ٣٣٠°

الحل :

(ا) حا (٢٢٥°) = حا (١٨٠° + ٤٥°) = – حا ٤٥°   (لماذا ؟)

= – $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

حتا (٢٢٥°) = حتا (١٨٠° + ٤٥°)

= – حتا ٤٥° = – $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

ظا (٢٢٥°) = ظا (١٨٠° + ٤٥°) = ظا ٤٥° = ١

(ب) حا (–٣٣٠°) = حا (–٣٣٠° + ٣٦٠°) من القاعدة (٣ – ١٠)

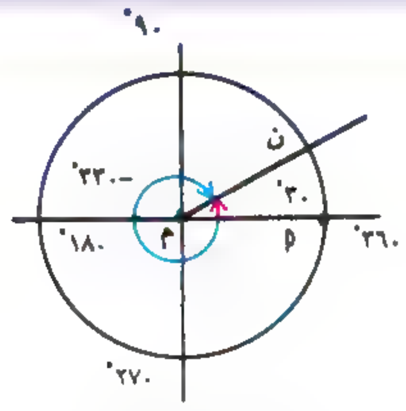
= حا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

حتا (– ٣٣٠°) = حتا (–٣٣٠° + ٣٦٠°) = حتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

وبطريقة مشابهة أو بتطبيق المتطابقة ظا هـ = $\frac{حاهـ}{حتاهـ}$

ستجد أن ظا (– ٣٣٠°) = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

(لاحظ أن الزاويتين الموجهتين اللتين قياساهما -٣٣٠° ، ٣٠° لهما الضلع الابتدائي نفسه [م أ والضلع النهائي نفسه [م ن كما في الشكل (٣ - ٣٣)) .



شكل (٣ - ٣٣)

مثال (٣ - ١٤) :

إذا كانت ١ + ٢ حتاهـ = ٠ ، ٠ < هـ < ٣٦٠° فأوجد قيم هـ

الحل :

١ + ٢ حتا هـ = ٠ ⟸ حتا هـ = $-\frac{١}{٢}$

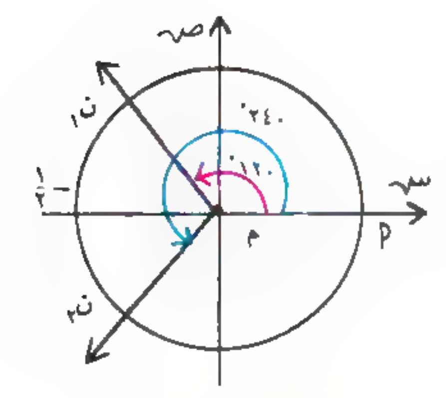
⟸ حتا هـ = - حتا ٦٠°

ومنه : حتا هـ = حتا (١٨٠° - ٦٠°) من القاعدة (٣ - ١١)

أو : حتا هـ = حتا (١٨٠° + ٦٠°) من القاعدة (٣ - ١٢)

⟸ هـ ∈ { ١٢٠° ، ٢٤٠° } انظر الشكل (٣ - ٣٤)

فتكون مجموعة الحل : { ١٢٠° ، ٢٤٠° }



شكل (٣ - ٣٤)

تدريب (٣ - ١٣)

(١) أكمل الجدول التالي :

هـ بالدرجة	١٢٠°	١٣٥°		٢١٠°		٣٠٠°	
هـ بالراديان			$\frac{٥ط}{٦}$		$\frac{٤ط}{٣}$		$\frac{٧ط}{٤}$
حا هـ	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$						
حتا هـ			$-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$				
ظا هـ				$\frac{\sqrt{٣}}{٣}$			

(٢) بفرض ٠ ≤ هـ ≤ ٣٦٠° أوجد قيم هـ فيما يلي :

(أ) حا هـ = $\frac{١}{٢}$ (ب) حتا هـ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

(حـ) ٢ حا هـ + $\sqrt{٣}$ = ٠ (د) ظا هـ - $\sqrt{٣}$ = ٠

(هـ) حتا^{٢}هـ - ٣ حتا هـ + ٢ = ٠

٣ - ٥ التمثيل البياني لدالتي الجيب وجيب التمام :

تعريف (٣ - ٩)

تسمى الدالة د المعرفة على سـ ⊆ ح دالة دورية دورها أ ، إذا كان أ أصغر عدد حقيقي موجب بحيث : د (س + أ) = د (س) لكل س ∈ سـ

فلو رجعنا إلى القاعدة (٣ - ١٠) لوجدنا أن :

حتا (س + ٢ط) = حتاس

حا (س + ٢ط) = حـاس والدالتان حتا ، حا دوريتان ودور كلٍ منهما يساوي ٢ ط

بينما الدالة ظا دورها ط لأن :

ظا (س + ط) = ظا س القاعدة (٣ - ١٢)

مثال (٣ - ١٥) :

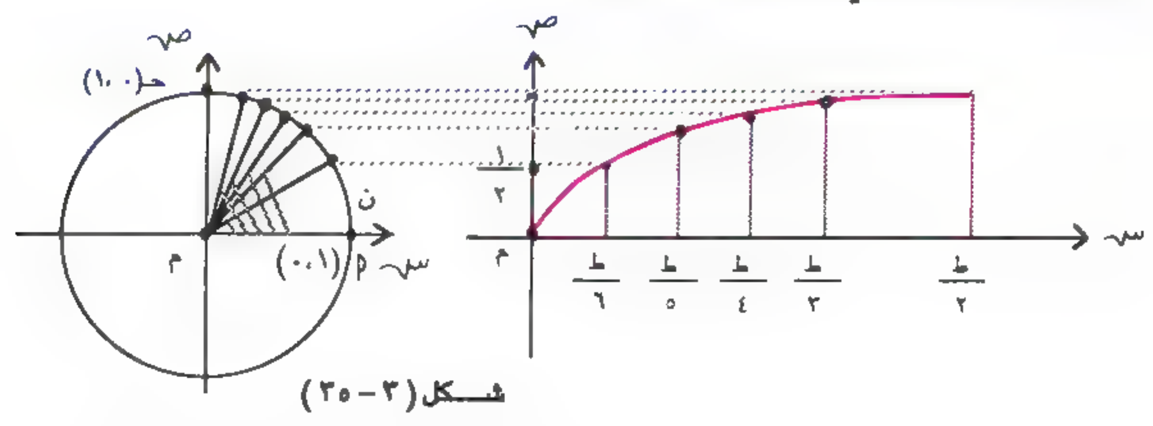
ارسم المنحنى الذي يمثل الدالة ص = حاس حيث ٠ ≤ س ≤ $\frac{ط}{٢}$

الحل :

الجدول التالي يمثل نقطاً من منحنى هذه الدالة خلال الفترة [٠ ، $\frac{ط}{٢}$] :

س	٠	$\frac{ط}{٦}$	$\frac{ط}{٤}$	$\frac{ط}{٣}$	$\frac{ط}{٢}$
حـا س	٠	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ≈ ٠٫٧١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ≈ ٠٫٨٦	١

وقد مثلنا هذه النقط في الشكل (٣ - ٣٥)



شكل (٣ - ٣٥)

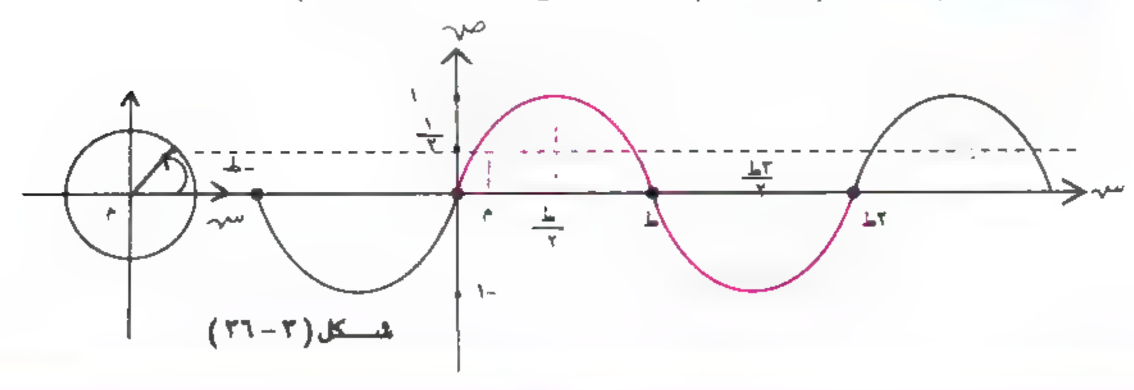
ولعلك تلاحظ أن قيمة حاس هي الإحداثي الصادي للنقطة ن على دائرة الوحدة ، وأن قيمتها تتزايد تدريجياً من (صفر) عندما س = صفراً (أي عندما تنطبق ن على ﻫ) إلى أن تصبح قيمتها مساوية ١ عندما س = $\frac{ط}{٢}$ (أي عندما تنطبق ن على حـ) وبهذه الطريقة تستطيع إكمال رسم المنحنى خلال الفترة ٠ ≤ س ≤ $\frac{ط}{٢}$ وذلك برسم كل نقطة عليه على ارتفاع النقطة المناظرة لها على دائرة الوحدة .

مثال (٣ - ١٦) :

ارسم المنحنى الذي يمثل الدالة : ص = حاس ، س ∈ ح

الحل :

لو اتبعت أسلوب المثال (٣ - ١٥) لحصلت على الشكل (٣ - ٣٦)



شكل (٣ - ٣٦)

ولعلك تلاحظ أن المنحني يكرر نفسه والجزء المرسوم باللون الأحمر يمثل كون س ∈ [٠ ، ٢ط]
وهي فترة تمثل دوراً واحداً ، وتحصل التغيرات نفسها في الفترات [-٢ط ، ٠] ، [٢ط ، ٤ط] . . .
وكذلك [- ط ، ط] ، [ط ، ٣ط] .

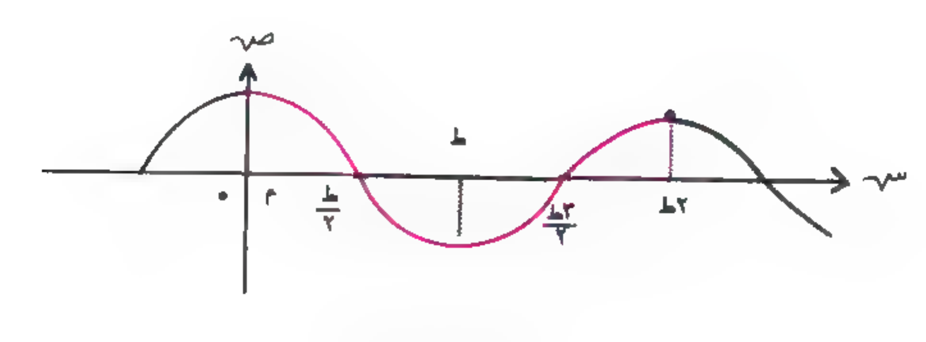
من جهة أخرى فإنك تلاحظ أن المنحني محصور بين المستقيمين ص = ١ ، ص = -١
وهذا يتفق مع ما سبق أن رأيت من قبل أن :. - ١ ≥ حا س ≥ ١

مثال (٣ ١٧) :

ارسم منحني الدالة ص = حتا س ، س ∈ ح

الحل :

بالرجوع إلى دائرة الوحدة أو بالاعتماد على قيم س نتوصل إلى التمثيل البياني المطلوب كما في الشكل (٣ - ٣٧) .



شكل (٣ - ٣٧)

ملحوظة (٣ - ٧)

سبق أن علمنا أن حتا س = حا (س + ط/٢) ، لذلك يمكننا رسم منحني الجيب أولاً ثم سحبه في الاتجاه السالب مسافة = ط/٢ نحصل على منحني جيب التمام .

تـمارين (٣ - ٣)

احسب كلاً من حا ع ، حتا ع ، ظا ع ، ظتا ع في الحالات التالية :

(١) ع = ٣٣٠° (٢) ع = $\frac{٣ط}{٤}$ راديان (٣) ع = ٢١٠°

(٤) ع = ٧٦٥° (٥) ع = ٤٢٠° (٦) ع = − ٣٠٠°

أحسب :

(٧) $\frac{\text{حتا}(٩٠° - هـ)\ \text{ظا}(٩٠° - هـ)}{\text{حتا}(- هـ)\ \text{حا}(٩٠° + هـ)\ \text{ظتا}(- ٩٠° - هـ)}$

(٨) $\frac{\text{ظتا}(ط - هـ)\ \text{حا}(ط - هـ)\ \text{حتا}(- هـ)}{\text{حتا}(ط - هـ)\ \text{ظا}(ط + هـ)\ \text{حتا}\ هـ}$

أوجد قيم الدوال المثلثية الأخرى للزاوية التي قياسها هـ في كل من الحالات التالية :

(٩) حا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ٠ < هـ < ٩٠°

(١٠) حتا هـ = − $\frac{١}{٢}$ ، ٩٠° < هـ < ١٨٠°

(١١) ظاهـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، − ١٨٠° < هـ < − ٩٠°

(١٢) ظتاهـ = − $\sqrt{٣}$ ، − ٩٠° < هـ < ٠

(١٣) ارسم بالطريقة المتبعة في المثال (٣ - ١٥) المنحني البياني للدالة :

ص = حتا س ، ٠ ≤ س ≤ $\frac{ط}{٢}$

(١٤) ارسم المنحني البياني للدالة :

ص = حا س ، س ∈ [− ط ، ط]

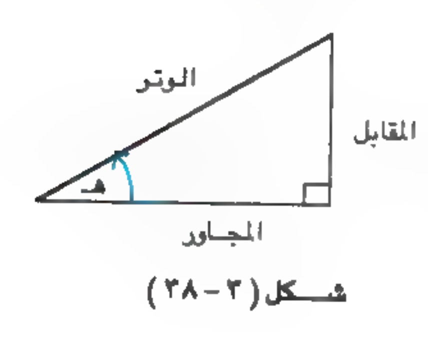
(١٥) ارسم المنحني البياني للدالة :

ص = حتاس ، س ∈ [− ط ، ط]

٣ - ٦ الدوال المثلثية للزاوية وتطبيقات حساب المثلثات :

(أ) الدوال المثلثية للزاوية :

رأيت في مقرر الصف الأول الثانوي أن قيم الدوال المثلثية لزاوية حادة في مثلث قائم الزاوية قياسها هـ تحدد على النحو الآتي :



شـكل (٣-٣٨)

حاهـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ $\Leftarrow$ قتاهـ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

حتاهـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ $\Leftarrow$ قاهـ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

ظاهـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ $\Leftarrow$ ظتاهـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

انظر الشكل (٣ - ٣٨)

مثال (٣ - ١٨) :

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه |أ حـ| = ٢٠ سم ، |ب حـ| = ١٢ سم

أوجد قيم الدوال المثلثية لكلٍ من زاويتيه الحادتين .

الحل : لاحظ أن : $(|\text{أ ب}|)^2 = (|\text{أ حـ}|)^2 - (|\text{ب حـ}|)^2$ (فيثاغورس)

$= (٢٠)^2 - (١٢)^2 = ٢٥٦$

|أ ب| = ١٦ سم . شكل (٣ - ٣٩)

شـكل (٣-٣٩)

إذن : حا أ = $\frac{١٢}{٢٠}$ = ٠٫٦ ، حتا أ = $\frac{١٦}{٢٠}$ = ٠٫٨ ، ظا أ = $\frac{١٢}{١٦}$ = ٠٫٧٥

قتا أ = $\frac{٢٠}{١٢}$ ≈ ١٫٦٧ ، قا أ = $\frac{٢٠}{١٦}$ = ١٫٢٥ ، ظتا أ = $\frac{١٦}{١٢}$ ≈ ١٫٣٣

وحيث إن : حـ = ٩٠° − أ يكون ≈ :

حا حـ = ٠٫٨ ، حتا حـ = ٠٫٦ ، ظا حـ ≈ ١٫٣٣

قتاحـ = ١٫٢٥ ، قاحـ ≈ ١٫٦٧ ، ظتاحـ ≈ ٠٫٧٥

ملحوظة (٣ – ٨)

(١) لعلك تلاحظ أن الدوال المثلثية هي الدوال الدائرية التي سبق تعريفها مطبقة على قياسات زوايا مثلث .

أي أن قيمة أي دالة مثلثية لزاوية قياسها هـ تساوي قيمة الدالة الدائرية التي قياسها هـ

(٢) توخياً للاختصار كتبنا : حا أ ، حتا أ ، . . . . ، حا حـ ، جتا حـ ، . . . . .

بدلاً من : حا $\hat{أ}$ ، حتا $\hat{أ}$ ، . . . . . ، حا $\hat{حـ}$ ، جتا $\hat{حـ}$ ، . . . . .

نتيجة (٣ – ٤)

في المثلث أ ب حـ القائم في ب إذا فرضنا |ب حـ| = أَ ، |أ حـ| = بَ ، |أ ب| = حـَ فإن :

(١) حا أ = $\frac{أَ}{بَ}$ ⟸ أَ = بَ حا أ (٣ – ١٦)

(أي أن : طول الضلع القائم = طول الوتر × جيب الزاوية المقابلة لذلك الضلع القائم) .

(٢) حتا أ = $\frac{حـَ}{بَ}$ ⟸ حـَ = بَ حتا أ (٣ – ١٧)

(أي أن . طول الضلع القائم = طول الوتر × جيب تمام الزاوية المجاورة لذلك الضلع القائم) انظر الشكل (٣ – ٤٠)

أ
بَ
حـَ
حـ
ب
أَ

شكل (٣ – ٤٠)

تدريب (٣ – ١٤)

(١) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه |أ حـ| = ٢٠ سم ، |ب حـ| = ١٢ سم .

أوجد قيم الدوال المثلثية للزاوية أ ، ثم استنتج من ذلك قيم الدوال المثلثية للزاوية جـ .

(٢) المثلث أ ب حـ قائم الزاوية في ب فيه حاحـ = $\frac{٨}{١٧}$ ، |أ حـ| = ٥٫٨ سم ،

أوجد طول كلٍ من : [أ ب] ، [ب حـ] .

(٣) أ ، ب ، حـ قياسات زوايا مثلث أي أن : أ + ب + حـ = ط

أثبت أن : حا(أ + ب) = حاحـ ، حتا (أ + ب) = − حتاحـ ، ظا (أ + ب) = − ظاحـ

ماذا يساوي كل من حا $\frac{أ + ب}{٢}$ ، حتا $\frac{أ + ب}{٢}$ ، ظا $\frac{أ + ب}{٢}$ بدلالة $\frac{حـ}{٢}$ ؟

(٤) تطبيقات حساب المثلثات :

توصلنا في مقرر الصف الأول الثانوي إلى قيم الدوال المثلثية من أجل بعض القياسات الخاصة للزاوية مثل : ٠° ، ٣٠° ، ٤٥° ، . . . . .

كما رأينا أنه إذا لم تكن للزاوية إحدى هذه القياسات الشهيرة وكنا بحاجة إلى إيجاد قيم الجيب أو جيب التمام أو الظل لزاوية قياسها هـ ، حيث ٠ ≤ هـ < ٩٠° ، فإنه بإمكاننا استخدام جداول خاصة تدعى الجداول المثلثية ، وهي على أنواع منها ماهو مقرب إلى ثلاثة أرقام عشرية ، ومنها ماهو مقرب إلى أربعة أرقام عشرية أو خمسة أرقام عشرية .... وقد تركنا للمعلم مهمة شرحها ، كما ألحقنا في نهاية ذلك المقرر تلك الجداول مقربة إلى أربعة أرقام عشرية .

وكما رأيت في البند (٣ − ١) ، فقد كان لعلمائنا نحن المسلمين الأثر الكبير في التوصل إلى القيم التي تتضمنها هذه الجداول ، تلك القيم التي أصبح من اليسير الحصول عليها من الآلة الحاسبة الألكترونية ، مما يجعلك تستطيع الاستغناء عن الجداول المثلثية ، إن كانت بين يديك آلة حاسبة تحتوي على قيم الدوال المثلثية .

وغني عن البيان أنه إذا لم تكن الزاوية واقعة بين الصفر و ٩٠° فإن باستطاعتنا الاستفادة من إحدى القواعد التي مرت معنا لتبسيط قيم الدوال الدائرية في البند (٣ − ٤) ، ومن ثم نستفيد من الجداول المثلثية .

فلو طلب منا ، مثلاً ، إيجاد (حا ٢٥٣°) ، فإننا نكتب :

حا ٢٥٣° = حا (١٨٠° + ٧٣°)

= − حا ٧٣° القاعدة (٣ − ١٢)

= − ٠٫٩٥٦٣ من الجداول

ولو أردت الاستعانة بالآلة الحاسبة فسوف تحصل مباشرة على : Sin 253° = - 0,9563048

وبالتقريب إلى أربعة أرقام عشرية تجد : حا ٢٥٣° = – ٩٥٦٣ر٠

مثال (٣ – ١٩) :

سلم طوله ٥ أمتار يرتكز على جدار رأسي بحيث يميل على أرض أفقية بزاوية قياسها ٣٦َ ٥٠° أوجد بعد كلٍ من نقطتي ارتكاز السلم على الجدار والأرض عن خط تلاقيهما .

شكل (٣ – ٤١)

الحل :

في الشكل (٣ – ٤١) ، [أ ب] يمثل السلم ، [حـ ب يمثل الأرض الأفقية ، [حـ أ يمثل الجدار الرأسي ، ق (ب حـ أ) = ٩٠°

في △ أ ب حـ نجد :

|حـ ب| = |أ ب| حتا ٣٦َ ٥٠° وباستخدام الآلة الحاسبة ثم التقريب إلى رقمين عشريين نجد :

|حـ ب| ≈ ٥ × ٦٣٤٧٣٠٥ر٠ = ١٧٣٦٥٢٥ر٣ ≈ ١٧ر٣ م (لماذا ؟)

|حـ أ| = |أ ب| حا ٣٦َ ٥٠° (لماذا ؟)

≈ ٥ × ٧٧٢٧٣٣٦ر٠ = ٨٦٣٦٦٧٩ر٣ ≈ ٨٦ر٣م

مثال (٣ – ٢٠) :

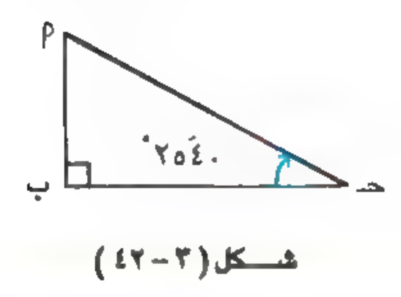
إذا كان طول ظل نخلة رأسية على أرض أفقية يساوي ٦ر٣٥م عندما كانت زاوية ارتفاع الشمس ٤٠َ ٢٥° ، فما ارتفاع النخلة ؟

الحل :

في الشكل (٣ – ٤٢) ، |أ ب| يمثل ارتفاع النخـلة ،

ب حـ = ٦ر٣٥م (طول ظل النخلة على الأرض) .

في المثلث أ ب حـ ، ظا حـ = $\frac{|أ ب|}{|ب حـ|}$ (لماذا ؟)



شكل (٣ – ٤٢)

⟸ |أ ب| = |ب حـ| . ظاحـ وباستعمال الآلة الحاسبة والتقريب إلى رقمين عشريين نجد :

|أ ب| = ٣٥٫٦ × ظا ٤٠ َ ٢٥ ° ≈ ٣٥٫٦ × ٠٫٤٨٠٠٥١٢

= ١٧٫١٠٧٦٢٢ م

≈ ١٧٫١١م

تمارين (٣ – ٤)

(١) المثلث أ ب حـ قائم الزاوية في ب ، فيه الزاوية $\hat{أ}$ قياسها ٦٠° ، نرسم [ب د] ارتفاعاً نازلاً على الوتر . فإذا كان |ب أ| = ٨ سم . فاحسب أطوال أضلاع المثلث أ ب حـ وطول الارتفاع [ب د] .

(٢) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه |أ ب| = ٥ سم ، |ب حـ| = ١٢ سم

أوجد قيمة كل من : (أ) حا أ ، حتا أ ، ظا أ ، (ب) حا حـ ، حتا حـ ، ظا حـ

(٣) إذا كانت ١٨٠° < س° < ٢٧٠° وكان ظا س = $\frac{٣}{٤}$

فأوجد : ١٠ حتا س حتا ٦٠ – ٦ ظتا س حا ٣٠°

(٤) (أ) استخدم الآلة الحاسبة (أو الجداول المثلثية) لحساب :

حتا ٤٧ َ ٣٤ ً حتا ١٣ َ ٢٥° – حا ٤٧ َ ٣٤° حا ١٣ َ ٢٥°

(ب) احسب حتا (٤٧ َ ٣٤° + ١٣ َ ٢٥°) بدون استخدام الجداول

(حـ) قارن بين النتيجتين في (أ) ، (ب) .

(٥) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه حاحـ = $\frac{١٥}{١٧}$ ، |أ ب| = ٣٠ سم .

أوجد : (أ) طول كلٍ من [ب حـ] ، [أ حـ]

(ب) قا أ ، قتا أ ، ظتا أ .

(٦) مئذنة طول ظلها على أرض أفقية ٢٠م عندما كانت زاوية ارتفاع الشمس ٣٥ َ١٥°

أوجد ارتفاع المئذنة .

(٧) سلم يرتكز على جدار رأسي وأرض أفقية ، فإذا كان طوله ١٢ قدماً ويبعد طرفه المرتكز على الأرض عن خط تلاقي الأرض والجدار مسافة ٧٫٣ قدم ، فأوجد كلاً من الزاويتين اللتين يصنعهما السلم مع الأرض والجدار ، ثم أوجد بعد نقطة استناده على الجدار عن خط تلاقي الجدار والأرض .

٣ - ٧ الدوال الدائرية لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما :

نظرية (٣ - ٧)

لكل زاويتين قياساهما هـ ، د فإن :

حتا (هـ + د) = حتا هـ حتا د - حا هـ حا د

شكل (٣ - ٤٣)

البرهان

في الشكل (٣ -٤٣) الدائرة (د) دائرة الوحدة والزوايا التي قياساتها هـ، - د، (هـ + د) كل منها في وضع قياسي حيث : ق (< أ م ن) = هـ + د ⟸ ن (حتا (هـ + د) ، حا (هـ + د))

ق (< أ م هـ) = هـ ⟸ هـ (حتا هـ ، حا هـ) ، ق (< أ م ب) = - د

⟸ ب (حتا (- د) ، حا (- د)) = ب (حتا د ، - حا د) (لماذا ؟)

الوتران [أ ن] ، [ب هـ] متطابقان (لماذا ؟)

⟸ |أ ن|^2 = |ب هـ|^2 وبتطبيق قانون المسافة بين نقطتين :

⟸ (حتا (هـ + د) -١)^2 + (حا (هـ + د) -٠)^2 = (حتاهـ - حتاد)^2 + (حاهـ + حاد)^2

⟸ حتا^2 (هـ + د) - ٢حتا (هـ + د) + ١ + حا^2(هـ + د)

= حتا^{2}هـ-٢حتاهـ حتاد + حتا^{2}د + حا^{2}هـ + ٢حاهـ حاد + حا^{2}د

⟸ حتا^2 (هـ + د) + حا^2(هـ + د) + ١ - ٢ حتا (هـ + د) =

حتا^{2}هـ+حا^{2}هـ + حتا^{2}د + حا^{2}د -٢ حتاهـ حتاد + ٢ حاهـ حاد

⟸ ١ + ١ - ٢ حتا (هـ + د) = ١ + ١ - ٢ حتاهـ حتاد + ٢ حاهـ حاد

⟸ حتا (هـ + د) = حتاهـ حتاد - حاهـ حاد (٣ - ١٨)

مثال (٣ ـ ٢١) :

أوجد بدون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة حتا ١٠٥°

الحل :

حتا (١٠٥°) = حتا (٦٠° + ٤٥°)

= حتا ٦٠° حتا ٤٥° − حا ٦٠° حا ٤٥°

$= \frac{١}{٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

$= \frac{\sqrt{٢}}{٤} (١ - \sqrt{٣})$

نظرية (٣ - ٨)

لكل زاويتين قياساهما حـ ، د فإن

حتا (حـ − د) = حتاحـ حتا د + حا حـ حا د (٣ - ١٩)

البرهــان

إن القـانون (٣ − ١٨) متطـابقة محقـقة لكـل زاويـتين ، ولهذا نستطيع أن نضع (− د) مكان (د) فيصبـح :

حتا (حـ + (− د)) = حتا حـ حتا (− د) − حاحـ حا (− د)

⟸ حتا (حـ − د) = حتا حـ حتا د + حاحـ حاد (لماذا ؟)

مثال (٣ ـ ٢٢) :

أوجد حتا ١٥° بدون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة .

الحل :

حتا (١٥°) = حتا (٦٠° − ٤٥°)

= حتا ٦٠° حتا ٤٥° + حا ٦٠° حا ٤٥°

$= \frac{١}{٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} = \frac{\sqrt{٢}}{٤} (١ + \sqrt{٣})$

نظرية (٣ - ٩)

لكل زاويتين قياساهما حـ ، د فإن :

حا (حـ + د) = حا حـ حتا د + حتا حـ حا د

البرهـــان

حا (حـ + د) = حتا ($\frac{ط}{٢}$ - (حـ + د)) (لماذا ؟)

= حتا (($\frac{ط}{٢}$ - حـ) - د) (لماذا ؟)

= حتا ($\frac{ط}{٢}$ - حـ) حتا د + حا ($\frac{ط}{٢}$ - حـ) حا د (لماذا ؟)

⟸ حا (حـ + د) = حا حـ حتا د + حتا حـ حا د (٣ - ٢٠)

نظرية (٣ - ١٠)

لكل زاويتين قياساهما حـ ، د فإن

حا (حـ - د) = حا حـ حتا د - جتا حـ حا د (٣ - ٢١)

(البرهان متروك للطالب)

نتيجة (٣ - ٥)

من المتطابقتين (٣ - ٢٠) ، (٣ - ١٨) نجد

ظا (حـ + د) = $\frac{\text{حا(حـ + د)}}{\text{حتا(حـ + د)}}$ = $\frac{\text{حاحـ حتاد + حتاحـ حاد}}{\text{حتاحـ حتاد - حاحـ حاد}}$

وبقسمة كلٍ من البسط و لمقام على حتا حـ حتا د نجد

ظا (حـ + د) = $\frac{\text{ظا حـ + ظاد}}{\text{١ - ظاحـ . ظاد}}$ (٣ - ٢٢)

نتيجة (٣ - ٦)

ظا (حـ - د) = $\frac{\text{ظاحـ - ظاد}}{\text{١ + ظاحـ . ظاد}}$ (٣ - ٢٣)

(البرهان متروك للطالب) .

مثال (٣ - ٢٣) :

أوجد قيمة المقدار .

$\frac{ظا ٧٥° - ظا ١٥°}{١ + ظا ٧٥° ظا ١٥°}$ بدون استخدام الجداول ولا الآلـة الحاسبة

الحل :

$\frac{ظا ٧٥° - ظا ١٥°}{١ + ظا ٧٥° ظا ١٥°}$ = ظا (٧٥° - ١٥°) المتطابقة (٣ - ٢٣)

= ظا ٦٠°

= $\sqrt{٣}$

مثال (٣ - ٢٤) .

إذا كانت ظاهـ = $\frac{٥}{١٢}$ ، ١٨٠° < هـ < ٢٧٠° ، حا ى = $\frac{٨}{١٧}$ ، ٩٠° < ى < ١٨٠°

فأوجد قيمة كلٍ من حا(هـ + ى) ، حتا (هـ - ى) ، ظا (هـ + ى)

الحل :

تعلم أن : حا (هـ + ى) = حا هـ حتا ى + حتا هـ حا ى (١) (لماذا ؟)

فلنحسب إذن كلاً من حا هـ ، حتا هـ ، حتا ى

من المتطابقة : ١ + ظا^{٢}هـ = $\frac{١}{حتا^{٢}هـ}$ (٣ - ٨)

نجد : ١ + $(\frac{٥}{١٢})^{٢}$ = $\frac{١}{حتا^{٢}هـ}$

⟸ حتا هـ = - $\frac{١٢}{١٣}$ (لـماذا اخترنا الحـل السالب ؟)

وبما أن ظاهـ = $\frac{حاهـ}{حتاهـ}$ فإن حاهـ = ظاهـ × حتاهـ = $\frac{٥}{١٢}$ × - $\frac{١٢}{١٣}$ = - $\frac{٥}{١٣}$

ومن المتطابقة : حا^{٢}ى + حتا^{٢}ى = ١ (٣ - ٤)

نجـد : $(\frac{٨}{١٧})^{٢}$ + حتا^{٢}ى = ١

$\Leftarrow$ حتاى = $-\frac{١٥}{١٧}$ (لماذا اخترنا الحل السالب ؟)

نعوض في (١) فنجد : حا (هـ + ى) = $(-\frac{٥}{١٣}) \times (-\frac{١٥}{١٧}) + (-\frac{١٢}{١٣}) \times \frac{٨}{١٧}$

$= -\frac{٢١}{٢٢١}$

كذلك : حتا (هـ - ى) = حتا هـ حتا ى + حا هـ حا ى (المتطابقة ٣ - ١٩)

$= (-\frac{١٢}{١٣}) \times (-\frac{١٥}{١٧}) + (-\frac{٥}{١٣}) \times (\frac{٨}{١٧})$

$= \frac{١٤٠}{٢٢١}$

طا (هـ + ى) = $\frac{\text{ظاهـ + ظاى}}{\text{١ - ظاهـ × ظاى}}$ ، (المتطابقة ٣ - ٢٢)

حيث ظا هـ = $\frac{٥}{١٢}$

ظا ى = $\frac{\text{حاى}}{\text{حتاى}} = \frac{\frac{٨}{١٧}}{-\frac{١٥}{١٧}} = -\frac{٨}{١٥}$

إذن : طا (هـ + ى) = $\frac{\frac{٥}{١٢} + (-\frac{٨}{١٥})}{١ - (\frac{٥}{١٢})(-\frac{٨}{١٥})} = -\frac{٢١}{٢٢٠}$

تدريب (٣ - ١٥)

(١) أوجد قيمة كلٍ ممايأتي دون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة .

حا ١٠٥° حا ١٥° - حتا ١٠٥° حتا ١٥° ، حا ١٣٥° حتا ١٥° - حتا ١٣٥° حا١٥°

$\frac{\text{١ + طا ١٣٤° طا١٤°}}{\text{طا ١٣٤° - طا١٤°}}$

(٢) مانوع المثلث الذي تحقق قياسات زواياه العلاقـة :

حا ɑ حتا ب = حتا ɑ حا ب

(٣) أثبت أن : حا (حـ + د) . حا (حـ - د) = $\text{حا}^{٢}\text{حـ} - \text{حا}^{٢}\text{د}$

(٤) أثبت أن : حتا (حـ + د) . حتا (حـ - د) = $\text{حتا}^{٢}\text{حـ} + \text{حتا}^{٢}\text{د} - ١$

تمارين (٣ - ٥)

(١) أوجد بدون استخدام الجداول والآلة الحاسبة مايلي :

(أ) حا ١٥° (ب) ظا ١٠٥° (حـ) حا ٢٨٥°

(د) حا ٤٠° حتا ٢٠° + حتا ٤٠° حا ٢٠° (هـ) حتا ٧٥° حتا ١٥° + حا ٧٥° حا ١٥°

(و) $\frac{\text{ظا } ٤٠° - \text{ظا } ١٠°}{١ + \text{ظا } ٤٠° \times \text{ظا } ١٠°}$ (ز) $\frac{١ - \text{ظا } ٥٠° \text{ ظا } ١٠°}{\text{ظا } ٥٠° + \text{ظا } ١٠°}$

(٢) إذا كان ظاهـ = $-\frac{٤}{٣}$ ، ٩٠ < هـ < ١٨٠ ، حاى = $-\frac{٣}{٥}$ بحيث تقع ى في الربع الثالث ،

فأوجد قيمة كلٍ من : حا (هـ + ى) ، حتا (هـ - ى) ، ظتا (هـ + ى) .

(٣) باستعمال متطابقات المجموع أثبت أن :

(أ) حا ($\frac{ط}{٢}$ + هـ) = حتا هـ (ب) حتا ($\frac{٣ط}{٢}$ - هـ) = - حا هـ

(حـ) ظا (ط + هـ) = ظا هـ (د) حتا (ط - هـ) = - حتا هـ

(٤) بفرض حا س = $\frac{٧}{٢٥}$ ، س تقع في لربع الثاني ، حتا ص = $\frac{٣}{٥}$ ، ص تقع في الربع الرابع ،

أوجد قيمة كلٍ من

حا (س + ص) ، حا (س - ص) ، حتا (س - ص) ، حتا (س + ص) .

(٥) إذا كان ظاهـ = $\frac{١}{٢}$ ، ٠ < هـ < ٩٠ ، حاى = $\frac{٢}{٣}$ حيث ى تقع في الربع الثاني ،

أوجد قيمة كل من :

ظا (هـ + ى) ، ظا (هـ - ى) .

(٦) استخدم المتطابقات التي حصلت عليها في البند (٣ - ٧) لإيجاد ناتج كلٍ مما يلي :

(أ) حا (هـ + ى) + حا (هـ - ى)

(ب) حا (هـ + ى) - حا (هـ - ى)

(حـ) حتا (هـ + ى) + حتا (هـ - ى)

(د) حتا (هـ - ى) - حتا (هـ + ى)

(٧) بفرض أ ، ب ، حـ زوايا مثلث أي أن : أ + ب + حـ = ط ، أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠ ، حـ ≠ ٠ ،

وإذا كان $\frac{\text{حا أ}}{\text{حا ب}}$ = ٢ حتا حـ ، فأثبت أن ب = حـ

(٨) برهن على صحة النظرية (٣ - ١٠) (٩) برهن على صحة النتيجة (٣ - ٦)

٣ - ٨ الدوال الدائرية لمضاعفات الزوايا :

سنبحث في هذا البند عن صيغ مثلثية لكلٍ من الدوال :

حا٢حـ ، حتا٢حـ ، ظا٢حـ ، ثم نستنتج صيغ كلٍ من الدوال . حا $\frac{\text{حـ}}{٢}$ ، حتا $\frac{\text{حـ}}{٢}$ ، ظا $\frac{\text{حـ}}{٢}$

(١) حا ٢ حـ = حا (حـ + حـ)

= حاحـ حتاحـ + حتاحـ حاحـ من المتطابقة (٣ - ٢٠)

⟸ حا٢حـ = ٢ حاحـ حتاحـ (٣ - ٢٤)

(٢) حتا٢حـ = حتا (حـ + حـ)

= حتاحـ حتاحـ - حاحـ حاحـ من المتطابقة (٣ - ١٨)

⟸ حتا٢حـ = حتا^{٢}حـ - حا^{٢}حـ (٣ - ٢٥)

نتيجة (٣ - ٧)

بما أن : حتا^{٢}حـ + حا^{٢}حـ = ١ ، فمن المتطابقة (٣ - ٢٥) نجد أن :

حتا٢حـ = ٢ حتا^{٢}حـ - ١ (٣ - ٢٦)

وأن :

حتا٢حـ = ١ - ٢ حا^{٢}حـ (٣ - ٢٧)

ومن المتطابقتين (٣ - ٢٦) ، (٣ - ٢٧) ينتج أن :

حتا^{٢}حـ = $\frac{\text{١ + حتا٢حـ}}{٢}$ (٣ - ٢٨)

حا^{٢}حـ = $\frac{\text{١ - حتا٢حـ}}{٢}$ (٣ - ٢٩)

(٣) ظا٢ﺟـ = ظا (ﺟـ + ﺟـ)

$$= \frac{\text{ظاﺟـ} + \text{ظاﺟـ}}{1 - \text{ظاﺟـ} \cdot \text{ظاﺟـ}}$$

$$\Leftarrow \boxed{\text{ظا٢ﺟـ} = \frac{\text{٢ظاﺟـ}}{1 - \text{ظا}^2\text{ﺟـ}}}$$ (٣ - ٣٠)

(٤) إذا لاحظنا أن : ﺟـ = ٢ × $\frac{\text{ﺟـ}}{2}$ فإن بإمكاننا كتابة المتطابقات بين (٣ - ٢٤)

إلى (٣ - ٢٩) على الترتيب :

حاﺟـ = ٢حا $\frac{\text{ﺟـ}}{2}$ حتا $\frac{\text{ﺟـ}}{2}$ (٣ - ٣١)

حتاﺟـ = حتا^2 $\frac{\text{ﺟـ}}{2}$ - حا^2 $\frac{\text{ﺟـ}}{2}$ (٣ - ٣٢)

حتاﺟـ = ٢ حتا^2 $\frac{\text{ﺟـ}}{2}$ - ١ (٣ - ٣٣)

حتاﺟـ = ١ - ٢ حا^2 $\frac{\text{ﺟـ}}{2}$ (٣ - ٣٤)

حتا^2 $\frac{\text{ﺟـ}}{2}$ = $\frac{\text{١ + حتاﺟـ}}{2}$ (٣ - ٣٥)

حا^2 $\frac{\text{ﺟـ}}{2}$ = $\frac{\text{١ - حتاﺟـ}}{2}$ (٣ - ٣٦)

(٥) نترك للطالب أن يستنتج من المتطابقتين (٣ - ٢٨) ، (٣ - ٢٩)

$$\boxed{\text{ظا}^2\text{ﺟـ} = \frac{\text{١ - حتا٢ﺟـ}}{\text{١ + حتا٢ﺟـ}}}$$ (٣ - ٣٧)

ومن المتطابقتين (٣ - ٣٥) ، (٣ - ٣٦)

$$\boxed{\text{ظا}^2 \frac{\text{ﺟـ}}{2} = \frac{\text{١ - حتاﺟـ}}{\text{١ + حتاﺟـ}}}$$ (٣ - ٣٨)

(٦) وأخيراً ، نترك للطالب أن يستنتج انطلاقاً من المتطابقات (٣ - ٣٠)، (٣ - ٣١)، (٣ - ٣٢)

قيم ظا ﺟـ ، حا ﺟـ ، حتا ﺟـ بدلالة ظا $\frac{\text{ﺟـ}}{2}$ فيحصل على :

$$\text{ظاﺟـ} = \frac{\text{٢ظا} \frac{\text{ﺟـ}}{2}}{\text{١- ظا}^2 \frac{\text{ﺟـ}}{2}}$$ (٣ - ٣٩)

$$\text{حاﺟـ} = \frac{\text{٢ظا} \frac{\text{ﺟـ}}{2}}{\text{١+ ظا}^2 \frac{\text{ﺟـ}}{2}}$$ (٣ - ٤٠)

$$\text{حتاﺟـ} = \frac{\text{١ - ظا}^2 \frac{\text{ﺟـ}}{2}}{\text{١+ ظا}^2 \frac{\text{ﺟـ}}{2}}$$ (٣ - ٤١)

(للحصول على (٣ – ٣٩) انطلق من المتطابقة (٣ – ٣٠)، وللحصول على (٣ – ٤٠) ، (٣ – ٤١) ضع مقاماً للطرف الأيسر في كلٍ من (٣ – ٣١)، (٣ – ٣٢) هو ($\text{حتا}^2 \frac{\text{جـ}}{2} + \text{حا}^2 \frac{\text{جـ}}{2} = 1$) ثم اقسم البسط والمقام في كلٍ منهما على $\text{حتا}^2 \frac{\text{جـ}}{2}$) ، وغني عن البيان أن إيجاد المتطابقات الثلاث الأخيرة غير ممكن إلا إذا كانت $\frac{\text{جـ}}{2} \notin \{ \text{س} : \text{س} = \frac{\text{ط}}{2} + \text{م ط} ، \text{م} \in \text{صـ} \}$ يضاف إلى ذلك بالنسبة للمتطابقة (٣ – ٣٩) كون $\text{جـ} \notin \{ \text{س} : \text{س} = \frac{\text{ط}}{2} + \text{م ط} ، \text{م} \in \text{صـ} \}$

مثال (٣-٢٥)

إذا كانت $\text{حا هـ} = \frac{3}{5}$ ، $0 < \text{هـ} < \frac{\text{ط}}{2}$ فأوجد قيمة كلٍ من :

$\text{حا}2\text{هـ}$ ، $\text{حتا}2\text{هـ}$ ، $\text{طا}2\text{هـ}$ ، $\text{حا}\frac{\text{هـ}}{2}$ ، $\text{حتا}\frac{\text{هـ}}{2}$

الحل :

$\text{حا}2\text{هـ} = 2 \text{ حا هـ حتا هـ}$ ، حيث $\text{حتا هـ} = \frac{4}{5}$ (لماذا؟)

$= 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

$\text{حتا}2\text{هـ} = \text{حتا}^2\text{هـ} - \text{حا}^2\text{هـ}$

$= \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

$\text{طا}2\text{هـ} = \frac{\text{حا}2\text{هـ}}{\text{حتا}2\text{هـ}} = \frac{24}{7}$

$\text{حا}^2\frac{\text{هـ}}{2} = \frac{1 - \text{حتا هـ}}{2} = \frac{1 - \frac{4}{5}}{2} = \frac{1}{10}$

$\text{حا}\frac{\text{هـ}}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ (علل لماذا اخترنا الحل الموجب)

$\text{حتا}^2\frac{\text{هـ}}{2} = \frac{1 + \text{حتا هـ}}{2} = \frac{1 + \frac{4}{5}}{2} = \frac{9}{10}$

$\text{حتا}\frac{\text{هـ}}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

مثال (٣ ٢٦) :

أوجد قيمة ظا $٢٢\frac{١}{٢}$°

الحل :

بوضع $\frac{جـ}{٢} = ٢٢\frac{١}{٢}° \Longleftarrow جـ = ٤٥°$ وبما أن $ظا^{٢} \frac{جـ}{٢} = \frac{١ - حتاجـ}{١ + حتاجـ}$

إذاً $ظا^{٢}\, ٢٢\frac{١}{٢}° = \frac{١ - حتا٤٥°}{١ + حتا٤٥°} = \frac{١ - \frac{١}{\sqrt{٢}}}{١ + \frac{١}{\sqrt{٢}}}$

$= \frac{\sqrt{٢} - ١}{\sqrt{٢} + ١} = (\sqrt{٢} - ١)^{٢}$ (لماذا ؟)

إذاً ظا $٢٢\frac{١}{٢}° = \sqrt{٢} - ١$ (علل إهمالنا الجذر السالب)

مثال (٣ ٢٧) .

أثبت صحة المتطابقة : $\frac{حتا٢هـ}{١ + حا٢هـ} = \frac{١ - ظاهـ}{١ + ظاهـ}$

الحل :

الطرف الأيمن $= \frac{حتا^{٢}هـ - حا^{٢}هـ}{حتا^{٢}هـ + حا^{٢}هـ + ٢حاهـ حتاهـ}$ (لماذا ؟)

$= \frac{(حتاهـ + حاهـ)(حتاهـ - حاهـ)}{(حتاهـ + حاهـ)^{٢}}$ (لماذا ؟)

$= \frac{حتاهـ - حاهـ}{حتاهـ + حاهـ}$ وبقسمة كلٍ من البسط والمقام على حتاهـ .

$= \frac{١ - ظاهـ}{١ + ظاهـ}$ = الطرف الأيسر .

مثال (٣ – ٢٨) :

اكتب حا ٣ س بدلالة حاس .

الحل :

حا ٣ س = حا(٢ س + س)

= حا٢ س حتا س + حتا٢ س حا س

= ٢ حاس حتا^{٢}س + (١ – ٢ حا^{٢}س) حاس (لماذا ؟)

= ٢ حاس (١ – حا^{٢}س) + (١ – ٢ حا^{٢}س) حاس

= حاس (٢ – ٢حا^{٢}س + ١ – ٢ حا^{٢}س)

= حاس (٣ – ٤ حا^{٢}س) .

تدريب (٣ – ١٦)

(١) في المثال (٣ – ٢٧) ابحث عن الشروط التي تجعل كلاً من طرفي المتطابقة معرّفاً والمتطابقة صحيحة .

(٢) اعتمد الأسلوب المتبع في حل المثال (٣ – ٢٨) لإيجاد قانون حتا ٣ س بدلالة حتا س .

(٣) اعتمد الأسلوب نفسه لإيجاد طا ٣ س بدلالة طاس ، أوضح أن القانون الناتج لايستخدم إلا ضمن شرطين يردّان الى الشرط : س $\neq$ $\frac{ط}{٦}$ + ك $\frac{ط}{٣}$ ، ك $\in$ صه

تمارين (٣ – ٩)

(١) إذا كانت طاهـ = $\frac{-٣}{٤}$ ، ١٨٠° < هـ < ٢٧٠° فأوجد قيمة كلٍ من :

حا ٢ هـ ، حتا ٢ هـ ، ظا ٢ هـ ، حا $\frac{هـ}{٢}$ ، حتا $\frac{هـ}{٢}$.

(٢) إذا كانت حتاهـ = $\frac{-١٢}{١٣}$ ، حيث ٩٠° < هـ < ١٨٠° ، فأوجد قيمة كلٍ من :

حا هـ ، حا ٢ هـ ، حتا ٢ هـ ، ظا ٢ هـ .

(٣) في التمرين (٢) أوجد قيمة كلٍ من : حا $\frac{هـ}{٢}$ ، حتا $\frac{هـ}{٢}$ ، ظا $\frac{هـ}{٢}$

(٤) برهن أن : $\frac{\text{حا٣هـ}}{\text{حاهـ}} - \frac{\text{حتا٣هـ}}{\text{حتاهـ}} = ٢$ (هـ $\neq$ ك . $\frac{\text{ط}}{٢}$ ، ك $\in$ ص)

(٥) برهن أن : ظتا هـ − ظا هـ = ٢ ظتا ٢ هـ   هـ $\neq$ ك . $\frac{\text{ط}}{٢}$ ، ك $\in$ ص)

(٦) بدون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة أوجد قيم كلٍ مما يلي :

(أ) ٢ حا ٧٥° حتا٧٥°   (ب) ١ − ٢ حا^{٢}١٥°   (حـ) ٢حتا^{٢} ٣٠َ ٢٢° − ١

(د) $\frac{١ - \text{ظا}^{٢} \frac{\text{ط}}{٨}}{١ + \text{ظا}^{٢} \frac{\text{ط}}{٨}}$ (هـ) $\frac{\text{٢ظا} \frac{\text{ط}}{٨}}{١ - \text{ظا}^{٢} \frac{\text{ط}}{٨}}$ (و) حتا^{٢} ٧٥° − حا^{٢} ٧٥°

في التمارين من (٧) إلى (١٠) أثبت صحة المتطابقات (دون مناقشة شروط التطبيق)

(٧) (حتاحـ $\pm$ حاحـ)^{٢} = ١ $\pm$ حا٢حـ

(٨) حتا^{٤}هـ − حا^{٤}هـ = حتا٢هـ

(٩) ظا ب $\pm$ ظاحـ = $\frac{\text{حا(ب} \pm \text{حـ)}}{\text{حتا ب حتاحـ}}$

(١٠) ١ − ظا^{٢}حـ = $\frac{\text{٢ ظاحـ}}{\text{ظا٢حـ}}$

(١١) برهن أن حا ٨ هـ = ٨ حا هـ حتا هـ حتا ٢ هـ حتا ٤ هـ

(١٢) برهن أن حتا ٤ هـ = ٨ حتا^{٤}هـ − ٨ حتا^{٢}هـ + ١

٣ − ٩ قوانين التحويل :

نحتاج أحياناً إلى تحويل مجموع نسبتين مثلثتين (أو الفرق بينهما) إلى حاصل ضرب نسبتين مثلثتين وبالعكس ، وسوف نستنتج في هذا البند مجموعة قوانين (أي متطابقات) تساعدنا على ذلك التحويل .

أولاً

نعلم أن : حا (حـ + د) = حا حـ حتا د + حتا حـ حا د   (٣ − ٢٠)

حا (حـ − د) = حا حـ حتا د − حتا حـ حا د   (٣ − ٢١)

(٣ – ٢٠) ، (٣ – ٢١) يعطيان بالجمع :

حا (حـ + د) + حا (حـ – د) = ٢ حاحـ حتاد

كما يعطيان بالطرح :

حا (حـ + د) – حا (حـ – د) = ٢ حتا حـ حاد

اتبع الأسلوب نفسه لاستنتاج حتا (حـ + د) + حتا (حـ – د)

حتا (حـ + د) – حتا (حـ – د)

ستحصل بذلك على المجموعة الأولى من قوانين التحويل :

حا (حـ + د) + حا (حـ – د) = ٢ حا حـ حتا د (٣ – ٤٢)
حا (حـ + د) – حا (حـ – د) = ٢ حتا حـ حا د (٣ – ٤٣)
حتا (حـ + د) + حتا (حـ – د) = ٢ حتا حـ حتا د (٣ – ٤٤)
حتا (حـ + د) – حتا (حـ – د) = – ٢ حا حـ حا د (٣ – ٤٥)

ولعلك تلاحظ أن القانون (٣ – ٤٥) – الأخير – يكتب أيضاً :

حتا (حـ – د) – حتا (حـ + د) = ٢ حا حـ حا د (٣ – ٤٦) (لماذا ؟)

كما تلاحظ أن كل قانون من هذه القوانين الأربعة يساعدك على تحويل حاصل ضرب نسبتين مثلثتين إلى مجموع (أو الفرق بين) نسبتين مثلثتين ، فمثلاً :

(٣ – ٤٢) ⟸

حاحـ حتاد = $\frac{1}{2}$ [حا (حـ + د) + حا (حـ – د)] (٣ – ٤٢)َ
حتاحـ حاد = $\frac{1}{2}$ [حا (حـ + د) – حا (حـ – د)] (٣ – ٤٣)َ
حتاحـ حتاد = $\frac{1}{2}$ [حتا (حـ + د) + حتا (حـ – د)] (٣ – ٤٤)َ
حاحـ حاد = – $\frac{1}{2}$ [حتا (حـ + د) – حتا (حـ – د)] (٣ – ٤٥)َ
أو :
حاحـ حاد = $\frac{1}{2}$ [حتا (حـ – د) – حتا (حـ + د)] (٣ – ٤٦)َ

مثال (٣ – ٢٩) .

احسب قيمة حتا ٧٥° حا ١٥°

الحل :

$$\text{حتا } ٧٥° \text{ حا } ١٥° = \frac{١}{٢} [\text{حا} (٧٥° + ١٥°) - \text{حا} (٧٥° - ١٥°)] \quad \text{من } (٣ - ٤٣)$$

$$= \frac{١}{٢} (\text{حا } ٩٠° - \text{حا } ٦٠°)$$

$$= \frac{١}{٢} \left(١ - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) = \frac{٢ - \sqrt{٣}}{٤}$$

ثانيـًا :

قلما نحتاج إلى المجموع (والفرق بين) جيبي الزاويتين حـ + د ، حـ – د أو جيبي تمامهما ، ولكن الذي نصادفه كثيراً جمع (أو طـرح) جيبـي زاويتـين س ، ص أو جيـبي تمـامهـما . أي أننا بحاجة إلى تحـويل كل من حا س + حا ص ، حا س – حا ص ، حتا س + حتا ص ، حتا س – حتا ص إلى جداء (أي حاصل ضرب) . فلو رجعنا إلى أي من القوانين السابقة (من (٣ – ٤٢) إلى (٣ – ٤٥) وفرضنا : حـ + د = س ، حـ – د = ص

فإن الجمع يعطي ٢ حـ = س + ص $\Leftarrow$ حـ = $\frac{س + ص}{٢}$

والطرح يعطي : ٢ د = س – ص $\Leftarrow$ د = $\frac{س - ص}{٢}$

وبالتعويض في القوانين المشار إليها نجد :

$$\text{حاس} + \text{حاص} = ٢ \text{ حا } \frac{س + ص}{٢} \text{ حتا } \frac{س - ص}{٢} \quad (٣ - ٤٧)$$

$$\text{حاس} - \text{حاص} = ٢ \text{ حتا } \frac{س + ص}{٢} \text{ حا } \frac{س - ص}{٢} \quad (٣ - ٤٨)$$

$$\text{حتاس} + \text{حتاص} = ٢ \text{ حتا } \frac{س + ص}{٢} \text{ حتا } \frac{س - ص}{٢} \quad (٣ - ٤٩)$$

$$\text{حتاس} - \text{حتاص} = - ٢ \text{ حا } \frac{س + ص}{٢} \text{ حا } \frac{س - ص}{٢} \quad (٣ - ٥٠)$$

المتطابقة الأخيرة تكتب :

$$\text{حتاس} - \text{حتاص} = ٢ \text{ حا } \frac{س + ص}{٢} \text{ حا } \frac{ص - س}{٢} \quad (٣ - ٥١)$$

مثال (٣ - ٣٠) .

حول إلى جداء :

(١) جتا ٥ حـ + جتا ٣ حـ (٢) حا ٩ حـ - حا ٣ حـ

الحل :

(١) حتا ٥ حـ + حتا ٣ حـ = ٢ جتا $\frac{٥حـ + ٣حـ}{٢}$ جتا $\frac{٥حـ - ٣حـ}{٢}$ (لماذا ؟)

= ٢ جتا ٤حـ . جتاحـ

(٢) حا ٩ حـ - حا ٣ حـ = ٢ حتا $\frac{٩حـ + ٣حـ}{٢}$ جا $\frac{٩حـ - ٣حـ}{٢}$ (لماذا ؟)

= ٢ حتا ٦ حـ حا ٣ حـ .

مثال (٣ - ٣١) :

أثبت صحة المتطابقة : $\frac{\text{حا ٣ حـ} - \text{حا حـ}}{\text{حتا ٣ حـ} + \text{حتا حـ}}$ = ظا حـ

الحل :

الطرف الأيمن = $\frac{\text{٢ حتا٢حـ حا حـ}}{\text{٢ حتا٢حـ حتا حـ}}$ (لماذا ؟)

= ظا حـ = الطرف الأيسر .

تدريب (٣ - ١٧)

(١) استنتج من المتطابقتين : (٣ - ٤٢) ، (٣ - ٤٤) صيغة لما تساويه ظاحـ .

(٢) استنتج من المجموعة الأولى لقوانين التحويل صيغة لما تساويه ظاحـ . ظاد

(٣) برهن أن حتا ٧٠° - حتا ١٠° = - حا ٤٠° .

(٤) في المثلث ρ ب حـ أثبت أن . حا ٢ ρ + حا ٢ ب + حا٢ حـ = ٤ حا ρ حا ب حا حـ

(٥) حول إلى مجموع (أو فرق) : (ρ) ٢حاه س حا ٢ س (ب) حا ٣ س جتا ٧ س

(٦) حول حا ρ + جتا ب إلى جداء (للحل . أكتب حتا ب = حا ($\frac{ط}{٢}$ - ب))

تمارين (٣ - ٧)

(١) بدون أستخدام الجداول أو الآلة الحاسبة أوجد قيم كلاً مما يلي :

(أ) جتا ١٥° جتا ٧٥° (ب) جتا ٤٥° حا ١٥° (جـ) جتا ١٥° حا ٧٥°

(د) حا ٤٥° حا ١٥° (هـ) حا ١٥° جتا١٦٥° (و) حا ١٣٥° جتا ٤٥°

(٢) عبر عما يأتي بصورة حاصل ضرب :

(أ) جتا ٩ حـ - جتا ٣ حـ (ب) حا٩ حـ - حا٣حـ (جـ) جتا ٧ حـ + جتا ٣ حـ

(د) حا ٦ حـ + حا ٤ حـ (هـ) جتا ٦٥° - جتا ٢٥° (و) حا ٢٢° - حا ١٨°

(ز) جتا ٤٥° + جتا ١٥° (ح) حا ٤٠° + حا ٢٠° (ط) حتا ٥٠° + حتا ١٠°

(ى) جا ٦ أ - حا ٢ أ

أثبت صحة المتطابقات الآتية (دون مناقشة شروط تطبيقها) .

(٣) $\frac{\text{جتا٥حـ} - \text{جتاحـ}}{\text{جتاحـ} + \text{جتا٥حـ}}$ = - ظا ٣ حـ ظا ٢ حـ

(٤) $\frac{\text{جا٣حـ} + \text{حاحـ}}{\text{جتا٣حـ} + \text{جتاحـ}}$ = ظا٢حـ

(٥) $\frac{\text{جا٣حـ} - \text{حاحـ}}{\text{جتا٣حـ} + \text{جتاحـ}}$ = ظاحـ

(٦) $\frac{\text{جتا٤حـ} - \text{جتا٢حـ}}{\text{حا٢حـ} + \text{حا٤حـ}}$ = - ظاحـ

(٧) $\frac{\text{جتا٥حـ} + \text{جتا٢حـ}}{\text{حا٢حـ} + \text{حا٥حـ}}$ = ظتا $\frac{\text{٧حـ}}{٢}$

(٨) $\frac{\text{جتا٣حـ}}{\text{جتاحـ}}$ -١ = - ٢ حا ٢ حـ ظاحـ

أثبت ماياتي :

(٩) جتا ٤٥ حا١٥ + جا ٤٥ جتا ١٥ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(١٠) جتا ٥ْ١ جتا ٥ْ٧ + جتا ٥ْ٤ حا ٥ْ١ = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$

(١١) أثبت أن قياسات زوايا المثلث ؟ ب حـ تحقق العلاقة :

$$\text{حا } ؟ - \text{حا ب} + \text{حا حـ} = ٤ \text{ حا } \frac{؟}{٢} \text{ حتا } \frac{ب}{٢} \text{ حا } \frac{حـ}{٢}$$

(١٢) لتحويل حا ٣ س + حا ٩ س + حا ١٥ س إلى جداء ، نكتب :

المقدار = حا١٥ س + حا ٣ س + حا ٩ س

= ٢حا ٩ س حتا ٦ س + حا ٩ س

= حا ٩ س (٢جتا ٦ س + ١)

اتبع الأسلوب نفسه لتحويل حتا٥س + حتا ٨ س + حتا ١١س إلى جداء

(١٣) اختصر المقدار الآتي إذا كان معرّفاً : $\frac{\text{حتا٥س + حتا١٠س + حتا١٥س}}{\text{حا٥س + حا ١٠س + حا ١٥س}}$

(١٤) مانوع المثلث الذي تحقق قياسات زواياه العلاقة حتا ؟ + حتا ب = حاحـ

٣ - ١٠ المعادلات المثلثية :

إذا كان المتغير في معادلة ما معطى بوساطة دالة (أو أكثر) من الدوال المثلثية (حتا ، حا ، ظا ، ظتا ، . .) فإن هذه المعادلة تدعى معادلة مثلثية ، مثل المعادلات : $\sqrt{٢}$ حتاس = ١ ، ٢حا^{٢}هـ + حتا هـ = ١ ، ظا^{٢}ص -٣ = ٠ ، . . ولحل أي معادلة مثلثية ، لابد لنا من التوصل إلى قيم الدالة المثلثية التي تحتويها ، وفق ماتعلمناه في حل المعادلات الجبرية ومن ثم التوصل إلى قيم المتغير التي تشكل مجموعة الحل . ومن هنا كان علينا أن نتعرف على طريقة حل كل من المعادلات الآتية والتي ندعوها (المعادلات المثلثية الأساسية) :

حتا س = ؟ ، حا س = ؟ ، ظا س = ؟

مثال (٣ - ٣١) :

أوجد مجموعة الحل للمعادلة حتا س = ؟ (٣ - ٥٢)

الحل :

لعلك تذكر أن $-1 \leqslant$ حتاس $\leqslant 1$ حسب (٣ - ٣)

وبالتالي :

إذا كانت $\rho > 1$ أو $\rho < -1$ فإن المعادلة (٣ - ٥٢)

مستحيلة الحل في ح أي أن مجموعة الحل $= \varnothing$

- وإذا كانت $\rho \in [-1 ، 1]$ فإنه يوجد على الأقل زاوية قياسها هـ بحيث :

ρ = حتا هـ ، وتصبح المعادلة (٣ - ٥٢) : حتا س = حتا هـ فيكون القياس الرئيسي للزاوية

س هو : س = هـ أو س = - هـ

(انظر الشكل ٣ - ٤٤)

ويكون القياس العام للزاوية س

الذي يمثل مجموعة الحل للمعادلة (٣ - ٥٢)

في ح هو

{س : س = ± هـ + ٢م ط حيث م $\in$ صـ}

شكل (٣ - ٤٤)

مثال (٣ - ٣٢) :

أوجد مجموعة الحل للمعادلة $\sqrt{2}$ حتا س - ١ = ٠

(١) في الفترة [٠ ، ط] (٢) في الفترة $[-\frac{ط}{2} ، \frac{ط}{2}]$

(٣) في الفترة [٠ ، ٢ ط] (٤) في ح .

الحل :

المعادلة $\sqrt{2}$ حتاس - ١ = ٠ $\Longleftarrow$ حتاس = $\frac{1}{\sqrt{2}} \in [-1 ، 1]$

والزاوية الموجبة هـ التي تحقق حتا هـ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ قياسها الرئيسي ٤٥° أو $\frac{ط}{4}$ راديان أي

أن المعادلة تكتب على الشكل : حتاس = حتا $\frac{ط}{4}$ وبالتالي

(١) في الفترة [٠ ، ط] يكون س = $\frac{ط}{٤}$ ، أي أن مجموعة الحل = { $\frac{ط}{٤}$ }

(٢) في الفترة [− $\frac{ط}{٢}$ ، $\frac{ط}{٢}$] وبالرجوع إلى الشكل (٣ − ٤٤) يوجد حلان

هما س = − $\frac{ط}{٤}$ ، س = $\frac{ط}{٤}$ ، ومجموعة الحل = { − $\frac{ط}{٤}$ ، $\frac{ط}{٤}$ }

(٣) في الفترة [٠ ، ٢ط] وبالرجوع إلى الشكل (٣ − ٤٤) يوجد حلان :

هما : س = $\frac{ط}{٤}$ ، س = $\frac{٧ط}{٤}$ ، ومجموعة الحل = { $\frac{ط}{٤}$ ، $\frac{٧ط}{٤}$ }

(٤) في مجموعة الأعداد الحقيقية ح تكون مجموعة الحل :

{ س : س = ± $\frac{ط}{٤}$ + ٢ م ط ، م ∈ ص }

ملحوظة (٣ − ٩)

لعلك تلاحظ أن الحلّين − $\frac{ط}{٤}$ ، $\frac{٧ط}{٤}$ ينتجان من الصيغة : س = − $\frac{ط}{٤}$ + ٢ م ط بتعويض م بالقيمتين ٠ ، ١ على الترتيب . وواضح لديك القياس الأول للزاوية الموجهة السالبة ∢ ب م د والقياس الثاني للزاوية الموجبة ∢ ب م هـ

تدريب (٣ − ١٨)

حل في ح كلاً من المعادلات :

(١) حتا هـ = − ١ (٢) حتا هـ = ١ (٣) حتا هـ = ٠

مثال (٣ − ٣٣) :

أوجد مجموعة الحل للمعادلة حا س = م (٣ − ٥٢)

الحل :

تعلم أن − ١ ≤ حا س ≤ ١ حسب (٣ − ٢)

وبالتالي فإن م ∈ [− ١ ، ١] وإذا تحقق هذا الشرط فإنه يوجد على الأقل زاوية قياسها

هـ حيث حا هـ = أ وتصبح المعادلة (٣ – ٥٣)

حاس = حا هـ ويكون القياس الرئيسي للزاوية س

هو: ق (< ب م حـ) = هـ

أو : ق (< ب م د) = ط – هـ

(كما هو واضح في الشكل (٣ – ٤٥))

ويكون القياس العام للزاوية س الذي يمثل مجموعة

الحل للمعادلة (٣ – ٥٣) في ح هو :

{ س : س = هـ + ٢ م ط أو س = ط – هـ + ٢ م ط ، م ∈ ص }

شـكل (٣ – ٤٥)

مثال (٣-٣٤) :

أوجد مجموعة الحل للمعادلة حا س = $\frac{١}{٢}$ على الفترات الآتية .

(أ) [٠ ، $\frac{ط}{٢}$] ، (ب) [٠ ، ط] ، (حـ) [٠ ، ٢ ط] ، (د) ح

الحل :

لعلك تذكر أن : حا (٣٠°) = $\frac{١}{٢}$ أي أن

حا س = $\frac{١}{٢}$ ⟺ حا س = حا $\frac{ط}{٦}$ ، بالرجوع إلى الشكل (٣ – ٤٥) نجد

(أ) في الفترة [٠ ، $\frac{ط}{٢}$] يكون س = $\frac{ط}{٦}$ ومجموعة الحل { $\frac{ط}{٦}$ }

(ب) في الفترة [٠ ، ط] يكون : س = $\frac{ط}{٦}$ ، $\frac{٥ط}{٦}$ ومجموعة الحل { $\frac{ط}{٦}$ ، $\frac{٥ط}{٦}$ }

(حـ) في الفترة [٠ ، ٢ ط] مجموعة الحل { $\frac{ط}{٦}$ ، $\frac{٥ط}{٦}$ }

(د) في مجموعة الأعداد الحقيقية ح تكون مجموعة الحل

{ س : س = $\frac{ط}{٦}$ + ٢ م ط أو س = $\frac{٥ط}{٦}$ + ٢ م ط ، م ∈ ص }

تدريب (٣ – ١٩)

حـــل في ح كلاً من المعادلات :

(١) جاس = ١ ، (٢) جاس = – ١ ، (٣) جاس = ٠ ، (٤) جاس = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

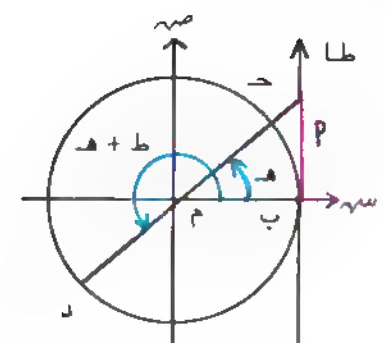
مثال (٣ – ٣٥) :

أوجد مجموعة الحل للمعادلة : ظاس = أ (٣ – ٥٤)

الحل :

بالرجوع إلى التعريف (٣ – ٦) تستطيع الانتباه إلى أنه في هذه الحالة .

س $\neq$ $\frac{ط}{٢}$ + م ط ، م $\in$ صـ



شـكل (٣ – ٤٦)

وبالرجوع إلى الملحوظة (٣ – ٥) والشـكل (٣ – ٤٦)

تستطيع أن تدرك أنه يوجد زاوية على الأقل هـ حيث ظاهـ = أ

(أ $\in$] – ∞ ، ∞ [ ) وتصبح المعادلة (٣ – ٥٤)

ظاس = ظاهـ ويكون القياس الرئيسي للزاوية س هو :

ق (> ب م حـ) = هـ أو : ق (> ب م د) = ط + هـ

ويكون القياس العام للزاوية س الذي يمثل مجموعة الحـل في ح للمعادلة (٣ – ٥٤) هو

{ س : س = هـ + م ط ، م $\in$ صـ }

مثال (٣ – ٣٦) :

أوجد مجموعة الحل للمعادلة : ظاس + $\sqrt{٣}$ = ٠ على الفترات :

(أ) [٠ ، ٢ ط] ، (ب) [٠ ، ط] ، (حـ) [٠ ، – $\frac{ط}{٢}$] ، (د) ح

الحل :

ظاس + $\sqrt{٣}$ = ٠ $\Longleftrightarrow$ ظاس = – $\sqrt{٣}$ = – ظا ($\frac{ط}{٣}$) = ظا (– $\frac{ط}{٣}$) (لماذا ؟)

(أ) في الفترة [٠ ، ٢ ط]

س = $-\frac{ط}{٣}$ + ٢ط = $\frac{٥ط}{٣}$

س = $-\frac{ط}{٣}$ + ط = $\frac{٢ط}{٣}$

ومجموعة الحل { $\frac{٥ط}{٣}$ ، $\frac{٢ط}{٣}$ }

(ب) في الفترة [٠ ، ط] مجموعة الحل { $\frac{٢ط}{٣}$ }

(حـ) في الفترة [٠ ، $\frac{ط}{٢}$] مجموعة الحل = ∅

(د) في ح مجموعة الحل :

{ س : س = $-\frac{ط}{٣}$ + م ط ، م ∈ ص }

شكل (٣ - ٤٧)

تدريب (٣ - [illegible])

(١) في المثال (٣ - ٣٦) استنتج حلول الفقرات (أ) ، (ب) ، (حـ) من حل الفقرة (د)

(٢) حل في ح كلاً من المعادلات :

(أ) ظا س = ١ (ب) ظا س = − ١ (حـ) ظا س = ٠

مثال (٣ - ٣٧) :

أوجد مجموعة الحل للمعادلة :

٢ حتا^{٢}حـ − حتا حـ − ١ = ٠ حيث : ٠ ≤ حـ < ٢ط

الحل :

بتحليل ثلاثي الحدود في الطرف الأيمن نجد :

(٢ حتا جـ + ١) (حتا جـ − ١) = ٠

بإما ٢ حتا حـ + ١ = ٠ أو حتا حـ − ١ = ٠

ومنه : حتا حـ = $-\frac{١}{٢}$ أو حتا حـ = ١

الحل الأول : حتا حـ = $-\frac{١}{٢}$ في الفترة [٠ ، ٢ط] حـ = $\frac{٢ط}{٣}$ ، $\frac{٤ط}{٣}$

الحــل الـثاني : حتا هـ = ١ في الفترة [٠ ، ٢ط [هـ = ٠

فتكون مجموعة الحــــل : { ٠ ، $\frac{٢ط}{٣}$ ، $\frac{٤ط}{٣}$ }

مثال (٣ - ٣٨) .

حل في ح المعادلة $\sqrt{٣}$ حتا س − حا س = $\sqrt{٢}$

استنتج مجموعة الحل في الفترة [٠ ، ٣٦٠°]

الحل :

لو قسمنا حدود المعادلة على ٢ لأصبحت

$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حتا س − $\frac{١}{٢}$ حا س = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

أو : حتا ٣٠°حتاس − حا ٣٠°حا س = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

أو : حتا (٣٠° + س) = حتا ٤٥° (لماذا ؟)

⟸ ٣٠° + س = ± ٤٥° + ٣٦٠° م م ∈ ص

س = −٣٠° ± ٤٥° + ٣٦٠°م م ∈ ص

ولاستنتاج مجموعة الحل في الفترة [٠ ، ٣٦٠°] نعوض عن م بقيمها الصحيحة المناسبة فنجد

من المجموعة : س = − ٣٠° + ٤٥° + ٣٦٠° م = ١٥° + ٣٦٠° ⟸ س = ١٥°

ومن المجموعة : س = −٣٠° − ٤٥° + ٣٦٠° م = − ٧٥° + ٣٦٠° ⟸ س = ٢٨٥°

فتكون مجموعة الحــــل { ١٥° ، ٢٨٥° }

تدريب (٣ - ٢٨)

(١) أوجـد مجموعـة الحــل في ح للمعادلة الــواردة في المثال (٣ − ٣٧) ثم استنتج منها المجموعة التي توصلت إليها في الفترة [٠ ، ٢ ط [

(٢) أوجد مجموعة الحل للمعادلة المثلثية في الفترة المعطاة :

٢حا^{٢}هـ − ٣حا هـ + ١ = ٠ ، ٠ ≤ هـ < ٢ط

(٣) حل المعادلة حتا ٢ س − حا ٢ س = ١ ، ٠ ≤ س ≤ ٣٦٠° (اقسم حدود المعادلة على $\sqrt{٢}$)

مثال (٣ - ٣٩) :

أوجد مجموعة الحـل للمعادلة المثلثية في الفترة المعطاة

حا ٢ حـ − ٣ حا حـ = ٠ ، [٠ ، ٢ط]

الحل :

باستخدام حا ٢ حـ = ٢ حا حـ جتا حـ نجد :

٢ حا حـ جتا حـ − ٣ حا حـ = ٠ ، حا حـ (٢ جتا حـ − ٣) = ٠

⟸ حاحـ = ٠ أو ٢ جتاحـ − ٣ = ٠

⟸ حاحـ = ٠ أو جتاحـ = $\frac{٣}{٢}$

حا حـ = ٠ ⟸ حـ = ٠ وط

جتا حـ = $\frac{٣}{٢}$ ليس لها حـل . (لماذا ؟)

إذن مجموعة الحـل = { ٠ ، ط }

مثال (٣ - ٤٠) :

أوجد مجموعة الحـل للمعادلة المثلثية في الفترة المعطاة :

٢جتا حـ + ظا حـ = قا حـ ط ≤ حـ < ٢ ط

(أ) بالتقدير الدائري . (ب) بالتقدير الستيني .

الحل :

بما أن ٢ جتا حـ + ظا حـ = قاحـ

إذن ٢ جتا^{٢}حـ + حا حـ = ١ (لماذا ؟)

⟸ ٢ (١ − حا^{٢} جـ) + حا حـ = ١ من المتطابقة الأساسية (٣ − ٤)

⟸ ٢حا^{٢}حـ − حا حـ − ١ = ٠

⟸ (٢حا حـ + ١) (حا حـ − ١) = ٠

⟸ حا حـ = −$\frac{١}{٢}$ أو حاحـ = ١

⟸ حـ = $\frac{٧ط}{٦}$ ، $\frac{١١ط}{٦}$ أو حـ = $\frac{ط}{٢}$

الحـل $ح = \frac{ط}{٢}$ حـل مرفوض (لماذا ؟)

إذن مجموعة الحـل بالتقدير الدائري = $\{ \frac{٧ط}{٦} ، \frac{١١ط}{٦} \}$

مجموعة الحـل بالتقدير الستيني = $\{ ٢١٠^\circ ، ٣٣٠^\circ \}$

مثال (٣ ـ ٤١) :

أوجد مجموعة الحـل للمعادلة المثلثية :

قا ح + ظا ح = ٠ ح $\in$ [٠ ، ٢ط]

الحل :

نضع المعادلة على الصورة :

قا ح = − ظا ح

أو : $\frac{١}{حتاح} = - \frac{حاح}{حتاح}$ حتا ح $\neq$ ٠

وبالتالي ح $\neq \frac{ط}{٢} ، \frac{٣ط}{٢}$ (لماذا ؟)

فيكون : حا ح = − ١ إذن : ح = $\frac{٣ط}{٢}$ غير مقبول

$\Longleftarrow$ إذن مجموعة الحـل = $\emptyset$

تدريب (٣ ـ ٢٢)

(١) أوجـد مجموعة الحـل للمعـادلة المثلثية :

جتا ٢ ح + جتا ح = ٠ ح $\in$ [٠ ، ٢ ط]

(٢) أوجد مجموعة الحل للمعادلة :

٢ $\sqrt{٣}$ حا س حتا س −٢حا^{٢} س + ١ = $\sqrt{٢}$ س $\in$ [٠ ، ٢ ط]

(إرشاد : استعمل قوانين ضعف الزاوية ثم استعمل طريـقة المثال ٣ − ٣٨)

تمارين (٣ – ٨)

أوجد مجموعة الحل للمعادلات المثلثية الآتية حسب الفترات المبينة أمامها .

(أ) بالتقدير الدائري .   (ب) بالتقدير الستيني .

(١) حا هـ = $\frac{-1}{2}$ ٠ < هـ < ٢ط

(٢) ظتا هـ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ٠ < هـ < ٣٦٠°

(٣) حا هـ = ظا هـ = ٠   ٠ ≤ هـ < ٢ط

(٤) حا هـ = جتا هـ   ٠ ≤ هـ ≤ ١٨٠°

(٥) حا ٢ هـ + حا هـ = ٠   ٠ ≤ هـ ≤ ٣٦٠°

(٦) ظا $\frac{هـ}{2}$ + جتا هـ = ١   ٠ ≤ هـ < ٢ط

(٧) ٢جتا^{2}هـ − جتا هـ = ٠   ٠ ≤ هـ < ٢ط

(٨) ٢جتاجـ + ظا هـ = قا هـ   ٠ ≤ هـ < ٢ط

(٩) قتا^{5}هـ − ٤ قتا هـ = ٠   ٠ ≤ هـ < ٢ط

(١٠) ٢جتا^{3}هـ + حتا^{2}هـ − ٢جتا هـ − ١ = ٠   ٠ ≤ هـ < ٣٦٠°

(١١) جتا هـ ظتا^{2}هـ = حتا هـ   ٠ ≤ هـ < ٣٦٠°

(١٢) حاهـ + ٢ حتا^{2}هـ = ١   ٠ ≤ هـ < ٢ط

(١٣) ٢ قا هـ حا هـ + ٢ = ٤ حاهـ + قاهـ   ٠ ≤ هـ < ٢ط

(١٤) حا ٢ هـ = حا هـ   ٠ ≤ هـ < ٢ ط

(١٥) حل في ح المعادلة :

حا^{3}س + حتا^{3}س = حا س

(إرشاد : قسم حدود المعادلة على حتا^{3} س ، وناقش عما إذا كان :

س = $\frac{ط}{2}$ + م ط ، م ∈ ص − حلاً لها)

(١٦) حل في ح المعادلة :

٢حتا^{٢}س + حا^{٢}س − حا س حتا س = ٢

(إرشاد : طبق قوانين ضعف الزاوية)

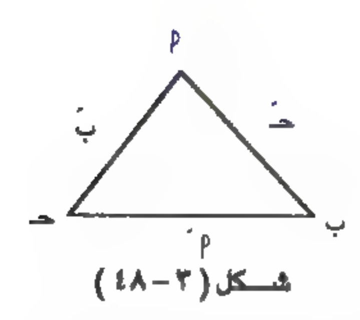
٣ − ١١ العلاقة بين قياسات زوايا المثلث وأطوال أضلاعه :

إن عناصر أي مثلث ٢ ب حـ هي أطوال أضلاعه :

|٢ ب| = حـَ ، |ب حـ| = ٢َ ، |حـ ٢| = بَ

وقياسات زواياه : ٢ ، ب ، حـ

سنبحث في هذا البند عن العلاقات بين هذه العناصر .



شكل (٣−٤٨)

أولاً : قاعدة جيوب التمام :

في الشكل (٣ − ٤٩) المثلث ٢ ب حـ ، وضعنا زاويته ٢̂ في وضع قياسي بحيث تنطبق ٢ على نقطة الأصل، [٢ ب] على الجزء الموجب لمحور السينات ، ورسمنا دائرة الوحدة التي مركزها ٢ فقطعت [٢ حـ] في ن (حتا ٢ ، حا ٢) (راجع التعريف ٣ − ٤) ومن تشابه المثلثين أ ن و ، ٢ حـ د وباعتبار القطع ٢و ، ٢د ، و ن ، د حـ موجهة نجد :

$$\frac{\overline{٢و}}{\overline{٢د}} = \frac{\overline{و ن}}{\overline{د حـ}} = \frac{|٢ن|}{|٢حـ|}$$

أو : $\frac{\text{حتا}٢}{س_{حـ}} = \frac{\text{حا}٢}{ص_{حـ}} = \frac{١}{بَ}$

ويكون إذن :

$$س_{حـ} = بَ\ \text{حتا}٢ \ ،\ ص_{حـ} = بَ\ \text{حا}٢$$

ومن المثلث ب حـ د القائم في د نجد :

$$|ب حـ|^{٢} = |ب د|^{٢} + |د حـ|^{٢}$$

أو : $٢َ^{٢} = (حـَ − بَ\text{حتا}٢)^{٢} + (بَ\text{حا}٢ − ٠)^{٢}$ من قانون المسافة بين نقطتين

شكل (٣−٤٩)

$$= \text{حـَ}^{٢} - ٢\,\text{بَ}\,\text{حـَ}\ \text{حتا}\ \text{أ} + \text{بَ}^{٢}\ \text{حتا}^{٢}\ \text{أ} + \text{بَ}^{٢}\ \text{حا}^{٢}\ \text{أ}$$

$$= \text{حـَ}^{٢} - ٢\,\text{بَ}\,\text{حـَ}\ \text{حتا}\ \text{أ} + \text{بَ}^{٢}\ (\text{حتا}^{٢}\ \text{أ} + \text{حا}^{٢}\ \text{أ})$$

فيكون إذن :

$$\text{أَ}^{٢} = \text{بَ}^{٢} + \text{حـَ}^{٢} - ٢\,\text{بَ}\,\text{حـَ}\ \text{حتا}\ \text{أ} \qquad (٣ - ٥٥)$$

وبطريقة مشابهة :

$$\text{بَ}^{٢} = \text{حـَ}^{٢} + \text{أَ}^{٢} - ٢\,\text{حـَ}\,\text{أَ}\ \text{حتا}\ \text{ب} \qquad (٣ - ٥٦)$$

$$\text{حـَ}^{٢} = \text{أَ}^{٢} + \text{بَ}^{٢} - ٢\,\text{أَ}\,\text{بَ}\ \text{حتا}\ \text{حـ} \qquad (٣ - ٥٧)$$

مثال (٣ ٢ ٤٢) :

احسب زوايا المثلث أ ب حـ علماً بأن : $\text{أَ} = \sqrt{٦}$ ، $\text{بَ} = ٢$ ، $\text{حـَ} = \sqrt{٣} + ١$

الحل :

من العلاقة (٣ − ٥٥) نجد :

$$\text{حتا}\ \text{أ} = \frac{\text{بَ}^{٢} + \text{حـَ}^{٢} - \text{أَ}^{٢}}{٢\,\text{بَ}\,\text{حـَ}} = \frac{٤ + ٣ + ٢\sqrt{٣} + ١ - ٦}{٢ \times ٢\,(\sqrt{٣} + ١)}$$

$$= \frac{٢ + ٢\sqrt{٣}}{٤\,(\sqrt{٣} + ١)} = \frac{٢\,(\sqrt{٣} + ١)}{٤\,(\sqrt{٣} + ١)} = \frac{١}{٢}$$

$$\Longleftarrow \hat{\text{أ}} = ٦٠^{\circ}$$

ومن العلاقة (٣ − ٥٦) نجد

$$\text{حتا}\ \text{ب} = \frac{\text{حـَ}^{٢} + \text{أَ}^{٢} - \text{بَ}^{٢}}{٢\,\text{حـَ}\,\text{أَ}} = \frac{٣ + ٢\sqrt{٣} + ١ + ٦ - ٤}{٢\,(\sqrt{٣} + ١)\sqrt{٦}} = \frac{٦ + ٢\sqrt{٣}}{٢\,(\sqrt{٣} + ١)\sqrt{٣}\sqrt{٢}}$$

$$= \frac{٢\,(٣ + \sqrt{٣})}{٢\sqrt{٢}\,(٣ + \sqrt{٣})} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$\Longleftarrow \hat{\text{ب}} = ٤٥^{\circ}$$

$$\hat{\text{حـ}} = ١٨٠^{\circ} - (٦٠^{\circ} + ٤٥^{\circ}) = ٧٥^{\circ}$$

ملحوظة (٣ – ١٠)

في المثال (٣ – ٤٢) تمكنا من إيجاد زوايا المثلث بعد معرفة أضلاعه وبصورة عامة فإن عملية إيجاد العناصر المجهولة من أضلاع المثلث وزواياه باستخدام عناصره المعلومة (أو باستخدام معطيات أخرى كافية) تدعى : **حل المثلث** .

مثال (٣ – ٤٣) :

حل المثلث ٢ ب حـ الذي فيه $\bar{٢}$ = ٨ سم ، $\bar{ب}$ = ١٠سم ، $\bar{حـ}$ = ٥ سم

الحل :

العناصر المجهولة هي قياسات الزوايا ، ٢ ، ب ، حـ

* من (٣ – ٥٥) جتا ٢ = $\frac{\bar{ب}^٢ + \bar{حـ}^٢ - \bar{٢}^٢}{٢ \bar{ب} \bar{حـ}}$ = $\frac{١٠٠ + ٢٥ - ٦٤}{١٠٠}$ = ٦١ر٠

ومن الجداول (أو الآلة الحاسبة) نجد ٢ ≈ ٥٢ ١٤ً

* ومن (٣ – ٥٦) وبعد التعويض وإجراء الحسابات نجد :

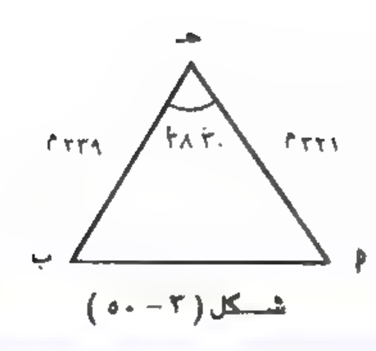
جتا ب = $\frac{-١١}{٨٠}$ = – ١٣٧٥ر٠ ($\hat{ب}$ زاوية منفرجة ، لماذا ؟)

$\hat{ب}$ ≈ ٩٨° (من الجداول أو الآلة الحاسبة)

* $\hat{حـ}$ = ١٨٠° – (٩٨° + ٥٢°) = ٣٠°

مثال (٣ – ٤٤) :

يراد حفر نفق عبر جبل من النقطة ٢ إلى النقطة ب انظر الشكل (٣ – ٥٠) فرصدت المسافة من النقطة حـ إلى كل من النقطتين ٢، ب فكانتا : ٣٢١ متراً ، ٢٣٩ متراً على التوالي ، فإذا كانت الزاوية ٢ حـ ب = ٣٠ ٢٨° فأوجد طول النفق .



شكل (٣ – ٥٠)

الحل :

طول النفق = |أ ب|

ومن علاقة جيب التمام في المثلث أ ب حـ

|أ ب|^{٢} = |أ حـ|^{٢} + |حـ ب|^{٢} − ٢ |أ حـ| . |حـ ب| حتاحـ وبالتعويض واستخدام الجداول

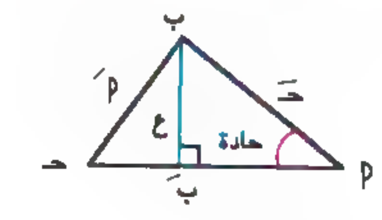
= (٣٢١)^{٢} + (٣٣٩)^{٢} − ٢ (٣٢١) (٣٣٩) × ٠٫٧٨٢٦

≈ ٤٧٦٣٩ ⟸ |أ ب| ≈ ٢١٨٫٢٦م .

ثانياً : حساب مساحة المثلث بمعرفة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما :

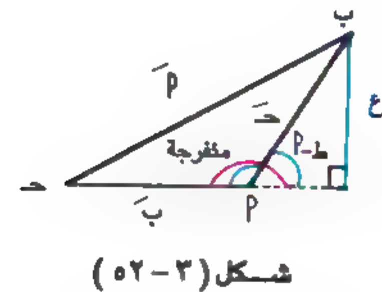
في كل من الشكلين (٣ − ٥١) ، (٣ − ٥٢) بفرض ع طول الارتفاع النازل على [أ حـ] :

مساحة المثلث أ ب حـ : م = $\frac{١}{٢}$ بَ × ع



شكل (٣-٥١)

ع = حَ حا أ



شكل (٣-٥٢)

ع = حَ حا (ط − أ) = حَ حا أ

بالحالتين :

م = $\frac{١}{٢}$ بَ . ع

أو : م = $\frac{١}{٢}$ بَ حَ حا أ

م = $\frac{١}{٢}$ بَ . ع

م = $\frac{١}{٢}$ بَ حَ حا أ

أي أن مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما

وبالتالي : م = $\frac{١}{٢}$ بَ حَ حا أ (٣ − ٥٨)

وكذلك م = $\frac{١}{٢}$ حَ أَ حا ب (٣ − ٥٩)

وأيضاً م = $\frac{١}{٢}$ أَ بَ حا حـ (٣ − ٦٠)

ثالثاً : قاعدة الجيوب :

من (٣ – ٥٨) ، (٣ – ٥٩) نجد : $\frac{أ}{حا أ} = \frac{ب}{حا ب}$ (٣ – ٦١)

ومن (٣ – ٥٩) ، (٣ – ٦٠) نجد : $\frac{ب}{حا ب} = \frac{حـ}{حا حـ}$ (٣ – ٦٢)

وأخيراً ، من (٣ – ٦١) ، (٣ – ٦٢) ينتج :

$$\frac{أ}{حا أ} = \frac{ب}{حا ب} = \frac{حـ}{حا حـ}$$ (٣ – ٦٣)

هذه العلاقة التي ندعوها : قاعدة الجيوب أو علاقة الجيوب .

وهي تعني أن : قياسات أضلاع أي مثلث تتناسب مع جيوب الزوايا المقابلة لها .

مثال (٣ – ٤٥)

حل المثلث أ ب حـ مع العلم أن : أ = ٢ $\sqrt{٢}$ ، ب = ٢ $\sqrt{٣}$ ، $\hat{أ}$ = ٤٥° .

الحل :

لاحظ أن المجاهيل هي : حـ ، $\hat{ب}$ ، $\hat{حـ}$

$\frac{أ}{حا أ} = \frac{ب}{حا ب}$ ومنه : $\frac{٢\sqrt{٢}}{حا ٤٥°} = \frac{٢\sqrt{٣}}{حا ب}$

فيكون حا ب = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (لماذا ؟)

⟸ $\hat{ب}$ = ٦٠° أو $\hat{ب}$ = ١٢٠° (لماذا ؟)

$\hat{أ}$ = ٤٥° $\hat{أ}$ = ٤٥°

$\hat{حـ}$ = ٧٥° $\hat{حـ}$ = ١٥° (لماذا ؟)

يوجد مثلثان يحققان الشروط المعطاة .

• لحساب حـَ في الحالة الأولى $\frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{حـَ}}{\text{حا حـ}}$

حيث حا حـ = حا ٧٥° = $\frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤}$ (لماذا ؟)

وبالتعويض والحساب تجد أن حـَ = $\sqrt{٦} + \sqrt{٢}$ = ٣٫٨٦

• ولحساب حـَ في الحالة الثانية وباستخدام علاقة الجيوب نفسها تجد أن :

حـَ = $\sqrt{٦} - \sqrt{٢} \approx$ ١٫٠٣٥ (تحقق من ذلك)

تدريب (٣ ـ ٢٣)

(١) استعمل قاعدة جيوب التمام لحساب حـَ في كلٍ من الحلين الواردين في المثال (٣ – ٤٥)

(٢) في متوازي الأضلاع أ ب حـ د : |أ ب| = س ، |ب حـ| = ص ، قياس الزاوية أ ب حـ = هـ

احسب مساحته . طبّق ذلك إذا علمت أن س = ١٠ سم ، ص = ٥ سم ، هـ = ٦٠°

(٣) مانوع المثلث الذي يحقق العلاقة أَ حتا أ = بَ حتا ب .

مثال (٣ ـ ٤٦) :

أثبت أنه لايمكن رسم المثلث أ ب حـ الذي فيه : أَ = ٥ سم ، بَ = ٨ سم ، $\hat{\text{أ}}$ = ٤٠°

الحل :

من قانون الجيب : $\frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}} \Longleftarrow \frac{٥}{\text{حا ٤٠°}} = \frac{٨}{\text{حا ب}}$

حا ب = $\frac{٨}{٥}$ حا ٤٠° = $\frac{٨}{٥}$ × ٠٫٦٤٢٨ (من الجداول)

= ١٫٠٢٨٤٨

ولكن ١٫٠٢٨٤٨ ∉ [– ١ ، ١] وبالتالي لايوجد زاوية قياسها ب بحيث حا ب = ١٫٠٢٨٤ ،

ولايوجد مثلث يحقق معطيات المسألة .

مثال (٣ – ٤٧) :

حـل المثلث ٩ ب حـ إذا علمت أن : $\hat{٩}$ = ٤٤° ، بَ = ١٠ سم ، حـَ = ١٢ سم

الحل :

لاحظ أن المجاهيل هي : ٩َ ، $\hat{ب}$ ، $\hat{حـ}$

٩َ^{٢} = بَ^{٢} + حـَ^{٢} − ٢ بَ حـَ حتا ٩ وبالتعويض واستخدام الجداول أو الآلة الحاسبة

٩َ^{٢} = ١٠٠ + ١٤٤ − ٢ × ١٠ × ١٢ × ٠٫٧١٩٣ = ٧١٫٣٦٨

٩َ = ٨٫٤٤٨ سم

ومن قانون الجيب : $\frac{٩َ}{حا ٩} = \frac{بَ}{حا ب} \Longleftarrow$ حا ب = $\frac{بَ حا ٩}{٩َ}$ وبالتعويض :

حا ب = $\frac{١٠ \times ٠٫٦٩٤٧}{٨٫٤٤٨}$ = ٠٫٨٢٢٣

$\hat{ب}$ = ١٩َ ٥٥° (من الجداول أو الآلة الحاسبة)

$\hat{حـ}$ = ١٨٠° − (١٩َ ٥٥° + ٤٤°) = ٤١َ ٨٠°

مثال (٣ – ٤٨) :

حـل المثلث ٩ ب حـ إذا علمت أن بَ = $\sqrt{٣}$ + ١ ، حـَ = $\sqrt{٣}$ − ١ ، $\hat{ب} - \hat{حـ}$ = ٩٠°

الحل :

المجاهيل : ٩َ ، $\hat{٩}$ ، $\hat{ب}$ ، $\hat{حـ}$

من علاقة الجيوب : $\frac{بَ}{حا ب} = \frac{حـَ}{حا حـ}$

ومن خصائص التناسب : $\frac{بَ - حـَ}{حا ب - حا حـ} = \frac{بَ + حـَ}{حا ب + حا حـ}$

أو : $\frac{حا ب + حا حـ}{حا ب - حا حـ} = \frac{بَ + حـَ}{بَ - حـَ} = \frac{٢\sqrt{٣}}{٢} = \sqrt{٣}$

تمارين (٣-٩)

حل المثلث أ ب حـ في كل الحالات التالية :

(١) أ̂ = ٦٢° ، ب̂ = ٧٥° ، أَ = ١٣٠

(٢) أ̂ = ٣٢° ، أَ = ٦٢٫٥ ، بَ = ١٤٣٫٥

(٣) ب̂ = ٦٢° ١٠َ ، بَ = ٢٥٨ ، حـَ = ٢٨٨

(٤) أ̂ = ٣٦° ١٢َ ، بَ = ٥ ، حـَ = ١٢

(٥) حـ̂ = ٩٠° ، أ̂ = ٤٠° ١٧َ ، حـَ = ٢٠٠

(٦) أَ = ٣ ، بَ = ٤ ، حـَ = ٥

(٧) أ̂ = ٩٠° ، أَ = ٤٣٥٦ ، حـَ = ٢٧٠٩

(٨) أوجد مساحة المثلث أ ب حـ الذي فيه أ̂ = ١٥٠° ، بَ = ٤٢ ، حـَ = ٣٢

(٩) أثبت أنه لايمكن رسم المثلث أ ب حـ الذي فيه حـَ = ٥ سم ، بَ = ٢ سم ، ب̂ = ٣٠°

(١٠) حل المثلث المتطابق الضلعين الذي يكون قياس زاويته الرأسية ١٤٠° ٢٤َ وطول كلٍ من ضلعيه المتطابقين ٣٦ م

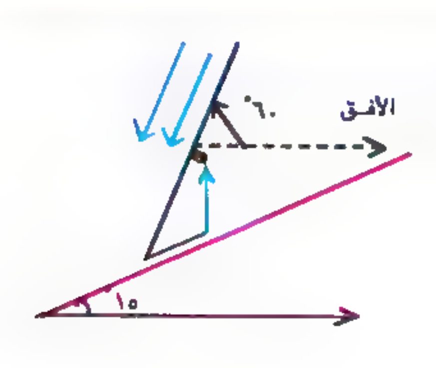
(١١) برهن أنه في أي مثلث أ ب حـ تتحقق العلاقة :

حا (ب − حـ) / ٢ = (بَ − حـَ) / أَ حتا أ / ٢

ثم استخدم هذه العلاقة في حل المثلث إذا علم أن :

بَ − حـَ = ٨ سم ، أَ = ٨ √٣ سم ، أ̂ = ٦٠°

(١٢) رجل طوله ١٧٠ سم ، وقف منتصباً على أرض مستوية تميل على الأفق بزاوية قدرها ١٥° ، أوجد طول ظل الرجل على هذه الأرض إذا علمت أن زاوية ارتفاع الشمس في تلك اللحظة ٦٠° (يطلب الحل في حالة الشكل المرسوم جانباً فقط) .



تمارين عامة

(١) حول من تقدير ستيني إلى تقدير دائري : ٣٢٠° ، ٥٢° ، − ٨٠° ، ٢٤٠°

(٢) حول إلى تقدير ستيني : $\frac{٣ ط}{٤}$ ، $\frac{٥ ط}{١٢}$ ، $\frac{٤ ط}{٩}$ ، $\frac{٧ ط}{١٢}$

(٣) إذا كانت $\angle \overleftarrow{أ م ن}$ في وضع قياسي وتقطع قوساً طوله ٨ سم من دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم ، فأوجد القياس الدائري للزاوية $\angle \overleftarrow{أ م ن}$ حيث ٠ < ق ($\angle \overleftarrow{أ م ن}$) < ٢ ط

(٤) إذا كان حا هـ = $\frac{٤}{٥}$ ، ٠ < هـ < ١٨٠° فأوجد :

(أ) حتا هـ　　(ب) ظتا هـ　　(جـ) حا ($\frac{ط}{٢}$ − هـ)

(د) حتا ($\frac{ط}{٢}$ + هـ)　　(هـ) حا (ط − هـ)　　(و) حتا (ط + هـ)

(ز) حا ($\frac{٣ط}{٢}$ + هـ)　　(ح) حا (٣ط + هـ)　　(ط) ظا (٥ ط + هـ)

(٥) أوجد قيمة كلٍ مما يلي مستعينا بالآلة (أو بالجداول) إن احتاج الأمر :

حا ٢٤٠° ، حا ٣١٠° ، حتا ٥٣َ١٠° ، ظا ٢٥٠° ، حتا ٢٨٥°

(٦) قيس ظل مئذنة عندما كانت زاوية ارتفاع الشمس ٣٠° ، ثم قيس الظل عندما كانت زاوية ارتفاع الشمس ٦٠° ، فكان الفرق بين طولي الظلين ٣٠ م ، فما ارتفاع المئذنة ؟

(٧) وقف صبي تحت مصباح مضيئ (مباشرة) فكان ارتفاع المصباح عن رأس الصبي متراً واحداً ، ثم تحـرك الصبي في خط مستقيم مسافة مترين فكان طول ظله ٣م ، واستمر بالحـــركة في الاتجاه نفسه مسافة س متراً حتي أصبح طول ظله ٥ر٧م ، فما طول الصبي ؟ وماقيمة س بالأمتار ؟

(٨) إذا كانت ظتا هـ = $-\frac{1}{2}$ ، ٢٧٠° < هـ < ٣٦٠° ، فأوجد قيمة كلٍ من :

(أ) $\frac{\text{حاهـ ظاهـ حتا } (\text{ط} - \text{هـ})}{\text{حا } (\frac{\text{ط}}{2} - \text{هـ})}$

(ب) $\frac{\text{حا هـ حا } (\frac{\text{ط}}{2} - \text{هـ}) \text{ حتا } (\frac{3\text{ط}}{2} - \text{هـ}) + \text{ظا } (\text{ط} + \text{هـ})}{\text{ظاهـ} + \text{حاهـ حتا } (\text{ط} - \text{هـ}) \text{ ظا } (\frac{\text{ط}}{2} - \text{هـ})}$

(٩) أوجد بدون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة كلاً مما يلي :

(أ) حا ٢٠° حتا ١٠° + حتا ٢٠° حا ١٠°

(ب) حتا ٥٥° حتا ٥° − حا ٥٥° حا ٥°

(جـ) $\frac{\text{ظا } 42° + \text{ظا } 18°}{1 - \text{ظا } 42° \text{ ظا } 18°}$

(١٠) أثبت صحة المتطابقات الآتية :

(أ) $\frac{1}{\text{قا}^2\text{هـ}} + \frac{1}{\text{قتا}^2\text{هـ}} = 1$

(ب) $\frac{\text{حا}^3\text{هـ} - \text{حتا}^3\text{هـ}}{\text{حا هـ} - \text{حتا هـ}} = 1 + \frac{1}{2} \text{ حا٢ هـ}$

(جـ) $\frac{\text{حا ٢ هـ} + \text{حا هـ}}{\text{حتا٢ هـ} + \text{حتا هـ} + 1} = \text{ظاهـ}$

(د) $\frac{1}{1 - \text{حاس}} + \frac{1}{1 + \text{حاس}} = 2 \text{ قا}^2\text{س}$

أثبت صحة المتطـابقات الآتية :

(١١) $\frac{\text{حتاحـ} - \text{حتا٥حـ} + \text{حا٣حـ}}{\text{حا٥ حـ} - \text{حاحـ} + \text{حتا٣حـ}}$ = ظا ٣ حـ

(١٢) $\frac{\text{حا ٨ حـ} - \text{حا ٤ حـ}}{\text{حا ٧ حـ} + \text{حا ٥ حـ}}$ = ٢ ظتا ٦ حـ حاحـ

(١٣) حا ١٥° حتا ١٥° + حتا ١٥° حا ٧٥° = $\frac{٣ + \sqrt{٣}}{٤}$

أوجد مجموعة الحل للمعادلات المثلثية الآتية (؟) بالراديان ، (ب) بالدرجات .

(١٤) حتا ٢حـ + ٣ حتاحـ + ٢ = ٠ ، ٠ ≤ حـ < ٢ ط

(١٥) ٢ حتا^{٢} $\frac{\text{حـ}}{٢}$ − ٣ حتاحـ = ٠ ، ٠ ≤ حـ < ٢ ط

(١٦) قا٢حـ قتا ٢حـ = ٢قتا ٢حـ ، ٠ ≤ حـ < ٣٦٠°

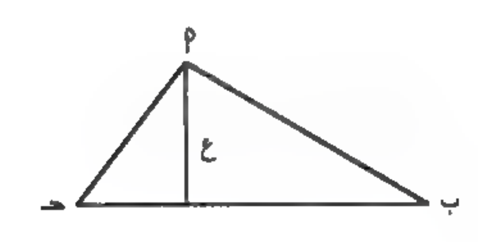
(١٧) حل المثلث ؟ ب حـ الذي فيه $\hat{\text{حـ}}$ = ٢٨° ٢٥َ ، بَ = ٦ ، حـَ = ٥ .

(١٨) حل المثلث ؟ ب حـ الذي فيه $\hat{؟}$ = ٤٢° ، بَ = ١٢ ، حـَ = ١٥ .

(١٩) حل المثلث ؟ ب حـ الذي فيه $\hat{\text{حـ}}$ = ٩٠° ، $\hat{\text{ب}}$ = ٥٦° ٨َ ، ؟َ = ٢١٧٫٥ .

(٢٠) في الشكل بجانبة أثبت أن :

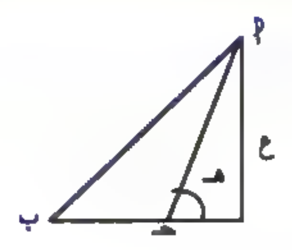
ع = $\frac{\text{؟َ حاب حاحـ}}{\text{حا (ب + حـ)}}$



ثم اسـتخدم الآلة الحاسبة لحساب ع إذا كانت :

؟َ = ١٥٠م ، $\hat{\text{ب}}$ = ٧٥° ، $\hat{\text{حـ}}$ = ٤٥°

(٢١) في الشكل بجانبه أثبت أن :



$$ع = \frac{ꝑَ \text{ حا ب حا هـ}}{\text{حا (هـ − ب)}}$$

ثم استخدم الآلة الحاسبة لحساب ع

علماً بأن : ꝑَ = ١٠٠ م ، $\hat{\text{هـ}}$ = ٨٠° ، $\hat{\text{ب}}$ = ٣٠°

(٢٢) ꝑ ب حـ د شكل رباعي محدب ، قطره [ب د] يقسمه إلى مثلثين :

الأول : ꝑ ب د متطابق الضلعين ، فيه | ꝑ ب | = | ꝑ د | = $\sqrt{٢}$ سم ، $\hat{ꝑ}$ = س°

والثاني : متطابق الأضلاع والمطلوب :

(١) أثبت أن مساحة الرباعي ꝑ ب حـ د (بدلالة س) = حا س + ٢ $\sqrt{٣}$ حا^{٢} $\frac{\text{س}}{٢}$

(٢) عين قيمة س لتكون مساحة هذا الرباعي تساوي ٢ $\sqrt{٣}$ سم^{٢} .

الباب الرابع

الأعداد المركبة

٤ – ١ نبذة تاريخية .

٤ – ٢ الحاجة إلى توسيع الأعداد الحقيقية .

٤ – ٣ الأعداد المركبة والعمليات عليها .

٤ – ٤ الخواص الجبرية للأعداد المركبة .

٤ – ٥ جذور المعادلة التربيعية .

٤ – ٦ التمثيل الهندسي للأعداد المركبة .

٤ – ٧ الجذور التكعيبية للعدد ١ .

٤ ـ ١ نبذة تاريخية

من المعلوم أنه بين عامي (١٦٤ - ٢٣٥هـ) عاش في بغداد العالم المسلم محمد بن موسى الخوارزمي الذي برز في زمن خلافة المأمون ولمع في الرياضيات والفلك حتى عينه المأمون رئيساً لبيت الحكمة الذي يعتبر - أنذاك - من كبرى جامعات العالم الإسلامي ، يوم لم يكن في غير العالم الإسلامي جامعات ، وقد كتب الخوارزمي مؤلفه الشهير (كتاب الجبر والمقابلة) ولأول مرة في التـاريخ ، صيغت كلمة (جـبر) وظهرت تحت عنوان يدل به على علم : لم تـتأكد استقلاليته بالاسم الذي خص به فقط ، بل ترسخ كذلك مع تصور لمفردات تقنية جديدة معدة للدلالة على الأشياء والعمليات [١]

والجدير بالذكر بالنسبة لموضوعنا ، أن الخوارزمي حل في كتابه هذا معادلات الدرجة الثانية وتطرق إلى وجود حالات ثلاث ، فإما أن يكون للمعادلة جذران مختلفان ، أو أن يكون لها جذران متساويان أو أن تكون المسألة مستحيلة [٢] ، وهـذا مانعبر عنه اليوم بأن للمعادلة جذرين تخيليين وهكذا يكون الخوارزمي ، رحمه الله ، أول من نبه إلى الحالة التي يكون فيها الجذر كمية تخيلية [٣]، مما قاد من جاؤوا بعده من الغربيين ، الذين ورثوا علومنا ، إلى افتراض وجود أعداد تخيلية ، وذلك في القرن السادس عشر الميلادي ، (أي بعد الخوارزمي بثمانية قرون) ، ويبدو أن الأعداد التخيلية لم تلق اهتماماً إلا في القرن الثامن عشر عندما اكتشف العالم السويسري «أويلر» (Leonard Euler) - (١٧٠٧ - ١٧٨٣م) - وجود علاقة وثيقة بين الأعداد المركبة والدوال المثلثية تعرف بعلاقة أويلر ، والمعروف أن أويلر هذا أول من استعمل الرمز i (من كلمة imaginary - أي تخيلي) للدلالة على العدد $\sqrt{-1}$ ، وقد ترجمنا هذا الرمز إلى (ت) إلا أن

---

(١) انظر (تاريخ الرياضيات العربية بين الجبر والحساب) د. رشدي راشد ، مركز دراسات الوحدة العربية - بيروت ١٩٨٩م

(٢) انظر (كتاب الجبر والمقابلة) ص ٢١ ط ١٩٦٨ تحقيق (د . مشرفة ، د. مرسي)

(٣) تاريخ العرب العلمي في الرياضيات والفلك - جامعة الدول العربيـة ط ١٩٦٣م ت قدري حافظ طوقان

الفضل - على مايبدو - في تقديم الأعداد المركبة بالصورة س + ص ت $(x + iy)$ وتمثيلها بنقاط في المستوي الإحداثي يعود إلى الرياضي الألماني «غاوس» (Carl Gauss) (١٧٧٧ - ١٨٥٥م) الذي أدرك دلالة هذه الأعداد في الجبر والهندسة .

٤ - ٢ الحاجة إلى توسيع الأعداد الحقيقية

أنت تعلم أن المعادلة : س + ١ = ٠ ليس لها حل في مجموعة الأعداد الطبيعية ط ، وقد كان هذا هو الدافع الأساسي لتوسيع هذه المجموعة بإضافة عناصر جديدة إليها (هي مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة) للحصول على مجموعة الأعداد الصحيحة صه، ولعلك تذكر أنه لما كانت صه لا تفي بالغرض عندما واجهتنا معادلات مثل المعادلة ٢ س = ١ ، كانت التوسعة من صه إلى مجموعة الأعداد النسبية ن لحل هذه المعادلة وأمثالها .

ولعلك تذكر أيضاً أن معادلة مثل : س^{٢} = ٢ ليس لها حل في ن لأن الجذر التربيعي للعدد ٢ (أي $\sqrt{٢}$) ليس عدداً نسبياً ، مما استوجب ضم هذا العدد وأمثاله من الأعداد غير النسبية إلى ن لتكوين مجموعة الأعداد الحقيقية ح .

لقد وجدنا أن مجموعة الأعداد الحقيقية ح ، بعمليتي الجمع والضرب المعروفتين ، أي النظام ذي العمليتين (ح ، + ، ٠) ، تشكل ساحة واسعة للتعامل مع المعادلات الجبرية ، ولكنها هي الأخرى لاتخلو من قصور ، فالمعادلة : س^{٢} + ١ = ٠ (٤ - ١)

وهي من أبسط معادلات الدرجة الثانية ، ليس لها حل في ح ، مما حدا بمؤسس علم الجبر (الخوارزمي) أن يطلق على أمثالها : معادلة مستحيلة ، لأنه لايوجد عدد حقيقي يكون مربعه مساوياً - ١ ، فمربع العدد الحقيقي هو دوماً أكبر من (أو يساوي) الصفر .

وهذا يقودنا بطبيعة الحال إلى البحث عن مجموعة أوسع من ح تحتوي حل المعادلة (٤ - ١) (وماكان على شاكلتها). المطلوب إذن توسيع مجموعة الأعداد الحقيقية ح بإضافة عناصر جديدة عليها لنحصل على مجموعة جديدة ك نسميها مجموعة الأعداد المركبة تحقق الشروط التالية :

١ – أن تكون ح مجموعة جزئية من كـ .

٢ – أن تكون عمليتا الجمع والضرب على كـ امتداداً لعمليتي الجمع والضرب على ح .

٣ – أن يوجد عنصر ع ∈ كـ يحقق المعادلة (٤ – ١) .

٤ – ٣ مجموعة الأعداد المركبة والعمليات عليها

لو طلب منك التحقق من أن $\sqrt{-١}$ هو حل للمعادلة (٤ – ١) ، فغالباً ما تحاول تعويض هذه القيمة بالمتغير س في تلك المعادلة فتكتب :

$$(\sqrt{-١})^{٢} + ١ = \sqrt{-١} \times \sqrt{-١} + ١$$

$$= -١ + ١$$

$$= \text{صفراً}$$

مما يقودك إلى القول : إن $\sqrt{-١}$ هو أحد حلول هذه المعادلة لأنه حققها .

وهذا مقبول من الناحية الشكلية ، غير أن الأمر ليس بهذه البساطة ، لأن العدد $\sqrt{-١}$ ليس عدداً حقيقياً ، ومن ثم ليس لنا أن نقول $\sqrt{-١} \times \sqrt{-١} = -١$ لأن العملية × هي عملية الضرب التي ليس لدينا لها تعريف خارج المجموعة ح .

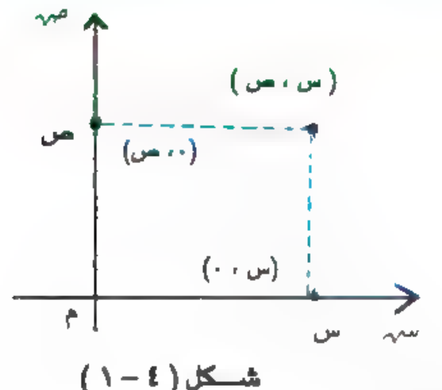
وقد اتفق على تسمية $\sqrt{-١}$ عدداً تخيلياً ونرمز له بالرمز ت كما أسلفنا في البند (٤ – ١).

وبالمثل : إذا عرّفنا العدد المركب بأنه من الشكل : س + ص ت حيث س ، ص ∈ ح ،

فإن الإشكال في هذا التعريف هو أنه يتضمن : عملية ضرب بين ت ∉ ح و ص ∈ح

للحصول على ص. ت كما يتضمن : عملية جمع بين س ∈ ح ، ص. ت ∉ح

وليس لدينا تعريف لهاتين العمليتين خارج المجموعة ح ، ولحل هذا الإشكال ، سوف نعرف العدد المركب بأنه زوج مرتب من الأعداد الحقيقية .



شكل (٤ – ١)

وقد سبق لك أن تعرفت على الزوج المرتب (س ، ص) من الأعداد الحقيقية بأنه عنصر من المجموعة ح × ح وأنه ممثل بنقطة من المستوي الإحداثي ، ولعلك تذكر أن هناك تقابل بين مجموعة الأزواج المرتبة (س ، ص) ونقاط المستوي ، يقودنا إلى اعتبار المجموعة ح × ح ممثلة بالمستوي الهندسي بكامله .

فإذا قلنا إن كل زوج مرتب (س ، ص) ∈ ح × ح هو عدد مركب فإن بإمكاننا تعريف تساوي العددين ($س_1$ ، $ص_1$) ، ($س_2$ ، $ص_2$) بأنه تساوٍ بين العددين $س_1$ ، $س_2$ وكذلك بين $ص_1$ ، $ص_2$ أي أن :

$$(س_1 ، ص_1) = (س_2 ، ص_2) \iff س_1 = س_2 ، ص_1 = ص_2$$

كما نعرّف عمليتي الجمع ⊕ والضرب ⊗ على مجموعة الأعداد المركبة ك على النحو الآتي

$$(س_1 ، ص_1) \oplus (س_2 ، ص_2) = (س_1 + س_2 ، ص_1 + ص_2) \qquad (٤ - ٢)$$

$$(س_1 ، ص_1) \otimes (س_2 ، ص_2) = (س_1 س_2 - ص_1 ص_2 ، س_1 ص_2 + س_2 ص_1) \qquad (٤ - ٣)$$

وباعتبار مجموعة الأعداد الحقيقية ممثلة بنقاط المحور السيني في المستوي الإحداثي ، فإن هذا يقودنا إلى اعتبار العدد الحقيقي س مساوياً العدد المركب (س ، ٠) أي أن

$$(س ، ٠) = س \quad لكل \ س \in ح \qquad (٤ - ٤)$$

وهذا يعني أن مجموعة الأعداد الحقيقية ح هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد المركبة ك ، ونحصل بذلك على :

$$س_1 \oplus س_2 = (س_1 ، ٠) \oplus (س_2 ، ٠) \qquad حسب (٤ - ٤)$$

$$= (س_1 + س_2 ، ٠) \qquad (لماذا ؟)$$

$= س_1 + س_2$ (لماذا ؟)

$س_1 \otimes س_2 = (س_1 ، ٠) \otimes (س_2 ، ٠)$

$= س_1 . س_2$ (لماذا ؟)

مما يعني أن تعريف الجمع والضرب على ك هو امتداد **لتعريف هاتين العمليتين على ح** ،

وبوسعنا أن نكتب إذن :

$(س_1 ، ص_1) + (س_2 ، ص_2)$ بدلاً من : $(س_1 ، ص_1) \oplus (س_2 ، ص_2)$

$(س_1 ، ص_1) . (س_2 ، ص_2)$ بدلاً من : $(س_1 ، ص_1) \otimes (س_2 ، ص_2)$

من جهة أخرى ، فلعلك تلاحظ أن :

$(٠ ، ١)^2 = (٠ ، ١) . (٠ ، ١)$

$= (-١ ، ٠)$ (لماذا ؟)

$= -١$

مما يعني أن (٠ ، ١) يحقق المعادلة (٤ - ١)

مما سبق نستطيع تعريف مجموعة الأعداد المركبة على النحو الآتي :

تعريف (٤ - ١)

يعرف نظام الأعداد المركبة (ك ، + ، .) بأنه **المجموعة ح × ح المزودة بعمليتي** الجمع والضرب المعرفتين بالمعادلتين :

$(س_1 ، ص_1) + (س_2 ، ص_2) = (س_1 + س_2 ، ص_1 + ص_2)$

$(س_1 ، ص_1) . (س_2 ، ص_2) = (س_1 س_2 - ص_1 ص_2 ، س_1 ص_2 + س_2 ص_1)$

ملحوظة (٤ ـ ١)

(١) من المساواة $(أ ، ٠) = أ$ لأي عدد حقيقي أ ، نحصل على أن :

$$أ\,(س ، ص) = (أ ، ٠)\,(س ، ص)$$

$$= (أ\,س ، أ\,ص) \qquad لكل\ أ \in ح ، (س ، ص) \in ك$$

(٢) كما هي العادة سنتحدث عن مجموعة الأعداد المركبة ك المكونة من الأزواج المرتبة (س ، ص) ونحن نعني بذلك النظام ذا العمليتين (ك ، + ، ٠)

ويسمى المستوي الإحداثي في تمثيله للأعداد المركبة : المستوي المركب .

(٣) مما سبق نستطيع أن نرمز للعدد المركب (٠ ، ١) بالرمز ت حيث $ت^{٢} = -١$ ، $ت = \sqrt{-١}$

يسمى العدد المركب ت عدداً تخيلياً ، ليس لأن هناك شكاً في وجوده ، ولكن للتأكيد على أنه لا ينتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية ، وحقيقة الأمر إن العدد ت لا يتطلب خيالاً أوسع لتقبله مما تطلبه العدد السالب -١ في الانتقال من الأعداد الطبيعية ط إلى الأعداد الصحيحة ص.

الصيغة الجبرية للعدد المركب :

لأي عدد مركب (س ، ص) نستطيع الآن ، استناداً إلى التعريف (٤ - ١) والمساواة (٤ - ٤) ، أن نكتب :

$$(س ، ص) = (س ، ٠) + (٠ ، ص)$$

$$= س + ص\,(٠ ، ١)$$

$$= س + ص\,ت \qquad (٤ - ٥)$$

وبذلك نحصل على الصيغة س + ص ت للعدد المركب (س ، ص) .

يسمى س في الصيغة (٤ - ٥) الجزء الحقيقي من العدد المركب س + ص ت ويسمى ص ، أي معامل ت ، الجزء التخيلي . فالجزء الحقيقي من العدد (٥ - ٢ ت)

هو العدد الحقيقي ٥ ، والجزء التخيلي هو العدد الحقيقي – ٢ .

انظر الشكل (٤ – ٢)

شكل (٤ – ٢)

مثال (٤ – ١) :

اكتب الأعداد التالية بالشكل س + ص ت .

(١ ، ٢) ، (٣ ، –٥) ، (١ ، ٢) (٣ ، –٥)

ثم مثلها في المستوي المركب .

الحل :

بالاستناد إلى المساواة (٤ – ٥) ، فإن :

(١ ، ٢) = ١ + ٢ ت

(٣ ، –٥) = ٣ – ٥ ت

وبناء على التعريف (٤ – ١) ، فإن :

(١ ، ٢) (٣ ، –٥) = (٣ +١٠، –٥ + ٦)

= (١٣ ، ١)

أي أن : (١ ، ٢) (٣ ، –٥) = ١٣ + ت .

شكل (٤ – ٣)

تدريب (٤ – ١)

(١) اختصر مايأتي : $\sqrt{-١٨}$ ، $\sqrt{-\frac{٢}{٥}}$ ، $\sqrt{-١٢} \times \sqrt{-٣}$

(٢) عبر عن العلاقة (س$_١$ ، ص$_١$) = (س$_٢$ ، ص$_٢$) $\Longleftrightarrow$ س$_١$ = س$_٢$ ، ص$_١$ = ص$_٢$

باستخدام الصيغة الجبرية .

(٣) اكتب الأعداد المركبة بالصيغة : س + ص ت

(٠ ، ٣) ، (–٥ ، ٠) ، (٠ ، ٠) ، ٥ (–٢ ، ٣) ، $(٣ ، ١)^٢$

(٤) اكتب الأعداد المركبة بشكل أزواج مرتبة

ت ، ٥ ، ٥ + ت ، –٢ + ٣ ت

تمارين (٤ - ١)

(١) إذا كان $ع_١$ = (٧ ، - ٣) ، $ع_٢$ = (٢ ، ٥) فاستخدم تعريف الجمع والضرب في ك

لإيجاد :

(أ) $ع_١ + ع_٢$ (ب) $ع_١ \cdot ع_٢$ (حـ) (١ ، ٠) $ع_١$ + (٢ ، - ١) $ع_٢$

(٢) أوجد حلول المعادلات التالية في ك :

(أ) ٦ (س ، ص) + (٠ ، - ٣) = ٠ (ب) $(س ، ص)^٢$ = (- ١ ، ٠)

(حـ) $(س ، ص)^٢$ = (٠ ، ١)

(٣) مثل بيانياً كلاً من الأعداد التالية على المستوي المركب :

(أ) $ع_١$ = ٣ + ٤ ت (ب) $ع_٢$ = ١ - ٢ ت (حـ) $ع_٣$ = - ١ - ٣ ت

(د) $ع_١ + ع_٢$ (هـ) $ع_١ + ع_٣$ (و) $ع_٢ + ع_٣$

(ز) $ع_١ \cdot ع_٢$ (ح) $ع_١ \cdot ع_٣$ (ط) $ع_٢ \cdot ع_٣$

(ى) $ع_١ \cdot (ع_٢ + ع_٣)$ (ك) $ع_١^٢$ (ل) $(ع_١ + ع_٣)^٢$

(٤) قد يبدو لأول وهلة أن تعريف الضرب على ك بالمعادلة (٤ - ٣) ليس له ما يبرره وأن

التعريف : ($س_١$ ، $ص_١$) ⊗ ($س_٢$ ، $ص_٢$) = ($س_١ س_٢$ ، $ص_١ ص_٢$)

أبسط وأكثر مسايرة لتعريف الجمع بالمعادلة (٤ - ٢) . حاول اكتشاف بعض المشكلات

التي يقود إليها هذا التعريف البديل .

٤ - ٤ الخواص الجبرية للأعداد المركبة :

مثال (٤ - ٢) :

لنفرض أن لدينا الأعداد المركبة

$ع_١$ = ٢ + ٣ ت

$ع_٢$ = ١ - ٥ ت

$ع_٣$ = ٦ ت

لنجرى الآن عمليتي الجمع والضرب بين $ع_1$ وَ $ع_2$ بالشكل التالي :

$ع_1 + ع_2 = (٢ + ٣ت) + (١ - ٥ت)$

$= (٢ + ١) + (٣ - ٥)ت$

$= ٣ - ٢ت$

$ع_1 ع_2 = (٢ + ٣ت)(١ - ٥ت)$

$= ٢(١) + ٢(-٥ت) + ٣ت(١) + ٣ت(-٥ت)$

$= ٢ - ١٠ت + ٣ت + ١٥$ لأن $ت^2 = -١$

$= ١٧ - ٧ت$

نلاحظ أن النتيجة التي توصلنا إليها تتفق مع تعريف الجمع والضرب حسب التعريف (٤ - ١) ، إذ أن :

$(٢ ، ٣) + (١ ، -٥) = (٢ + ١ ، ٣ - ٥)$

$= (٣ ، -٢)$

$(٢ ، ٣)(١ ، -٥) = (٢ - (-١٥) ، -١٠ + ٣)$

$= (١٧ ، -٧)$

وبإمكان الطالب أن يتحقق من صحة المساواة في كل مما يلي :

(١) $ع_2 + ع_1 = ع_1 + ع_2$

(٢) $ع_2 \; ع_1 = ع_1 \; ع_2$

(٣) $(ع_1 + ع_2) + ع_3 = ع_1 + (ع_2 + ع_3)$

(٤) $(ع_1 \; ع_2) ع_3 = ع_1 (ع_2 \; ع_3)$

كما أن :

$ع_1 (ع_2 + ع_3) = (٢ + ٣ت)(١ - ٥ت + ٦ت)$

$= (٢ + ٣ت)(١ + ت)$

$= ٢ + ٥ت - ٣$

$= -١ + ٥ت$

$ع_1 ع_2 + ع_1 ع_3$ = (١٧ − ٧ ت) + (٢ + ٣ ت) (٦ ت)

= ١٧ − ٧ ت + ١٢ ت − ١٨

= −١ + ٥ ت

مما يعني أن :

(٥) $ع_1 (ع_2 + ع_3) = ع_1 ع_2 + ع_1 ع_3$

وفيما يلي سنعمم النتائج التي توصلنا إليها في هذا المثال .

(أ) خواص التجميع والإبدال والتوزيع :

بصفة عامة إذا كان :

$ع_1 = س_1 + ص_1$ ت ، $ع_2 = س_2 + ص_2$ ت ، $ع_3 = س_3 + ص_3$ ت

أي ثلاثة أعـداد مركبـة ، فإننا باتبـاع الخطوات السابقة ، وسنترك تفاصيل ذلك للطالب ، نستنتج أن :

(١) $ع_1 + ع_2 = ع_2 + ع_1$	الإبدال في الجمع
(٢) $ع_1 ع_2 = ع_2 ع_1$	الإبدال في الضرب
(٣) $(ع_1 + ع_2) + ع_3 = ع_1 + (ع_2 + ع_3)$	التجميع في الجمع
(٤) $(ع_1 ع_2) ع_3 = ع_1 (ع_2 ع_3)$	التجميع في الضرب
(٥) $ع_1 (ع_2 + ع_3) = ع_1 ع_2 + ع_1 ع_3$	توزيع الضرب على الجمع

وهذه الخواص متوافرة في النظام (كـ ، + ، ٠) لأنها متوافرة في النظام (ح ، + ، ٠)

تدريب (٤ - ٢)

تحقق من الخواص (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) ، (٥) أعلاه مستخدماً التعريف (٤ − ١) .

(ب) وجــود العنصر الــمــحــايد :

إذا كان ﺃ + ب ت هو العنصر المحايد الجمعي ، فإن :

(س + ص ت) + (ﺃ + ب ت) = س + ص ت لكل س ، ص ∈ ح . ولكن الطرف الأيمن من هذه المساواة هو (س + ﺃ) + (ص + ب) ت ، مما يعني أن :

س + ﺃ = س ، ص + ب = ص

⟸ ﺃ = ٠ ، ب = ٠

أي أن العدد الحقيقي ٠ ، وهو العنصر المحايد الجمعي في ح ، هو أيضا العنصر المحايد الجمعي في ك .

وإذا كان ﺃ + ب ت هو العنصر المحايد الضربي في ك ، فإن :

(ﺃ + ب ت) (س + ص ت) = س + ص ت لكل س ، ص ∈ ح . وحيث إن الطرف الأيمن يساوي (ﺃ س − ب ص) + (ﺃ ص + ب س) ت فإن هذا يقتضي :

ﺃ س − ب ص = س ، ﺃ ص + ب س = ص

$$\text{ﺃ} = \begin{vmatrix} \text{س} & -\text{ص} \\ \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \text{س} & -\text{ص} \\ \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix} = ١$$

$$\text{ب} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} \\ \text{ص} & \text{ص} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \text{س} & -\text{ص} \\ \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix} = ٠$$

أي أن العنصر المحايد الضربي في ك هو العدد الحقيقي ١ ، وهو أيضاً العنصر المحايد الضربي في ح كما تعلم .

تدريب (٤ − ٣)

عند إيجاد العنصر المحايد الجمعي وكذلك العنصر المحايد الضربي ، اكتفينا في إيجاده باستعمال معادلة واحدة لأن العملية إبدالية . أوجد العنصر المحايد الجمعي ، وكذلك الضربي باستعمال المعادلة الأخرى في كل مرة .

(جـ) النظير الجمعي والنظير الضربي :

لأي عدد مركب س + ص ت يسمى العدد س′ + ص′ ت نظيره الجمعي إذا كان :

(س + ص ت) + (س′ + ص′ ت) = ٠

$\Longleftarrow$ (س + س′) + (ص + ص′) ت = ٠

$\Longleftarrow$ س + س′ = ٠ ، ص + ص′ = ٠ لأن ٠ = ٠ + ٠ ت

$\Longleftarrow$ س′ = − س ، ص′ = − ص

$\Longleftarrow$ − س − ص ت = − (س + ص ت) هو النظير الجمعي للعدد س + ص ت

كما أن النظير الضربي س″ + ص″ ت يحقق :

(س″ + ص″ ت) (س + ص ت) = ١

$\Longleftarrow$ س″ س − ص″ ص = ١ ، س″ ص + ص″ س = ٠ لأن ١ = ١ + ٠ ت

وعندما يكون س + ص ت $\neq$ ٠ فإن حل هاتين المعادلتين هو :

$$\text{س}'' = \begin{vmatrix} \text{١} & \text{−ص} \\ \text{٠} & \text{س} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \text{س} & \text{−ص} \\ \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix} = \frac{\text{س}}{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$$

$$\text{ص}'' = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{١} \\ \text{ص} & \text{٠} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \text{س} & \text{−ص} \\ \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix} = -\frac{\text{ص}}{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$$

وهذا يعني أن النظير الضربي للعدد س + ص ت هو :

$$(\text{س} + \text{ص ت})^{-1} = \frac{\text{س}}{\text{س}^2 + \text{ص}^2} - \frac{\text{ص}}{\text{س}^2 + \text{ص}^2}\,\text{ت} \qquad (٤ - ٦)$$

تدريب (٤ ـ ٤)

استخدم الخواص الواردة في (أ) ، (ب) ، (حـ) لإثبات أن :

(١) النظام (ك ، +) زمرة إبدالية .

(٢) النظام (ك*، ٠) زمرة إبدالية ، حيث ك* هي مجموعة الأعداد المركبة باستثناء الصفر

(د) تعريف عمليتي الطرح والقسمة :

باستطاعتنا الآن أن نعرّف ناتج طرح العدد المركب

$ع_٢ = س_٢ + ص_٢ ت$

من العدد المركب

$ع_١ = س_١ + ص_١ ت$

بالشكل $ع_١ - ع_٢ = ع_١ + (- ع_٢)$

حيث $- ع_٢$ هو النظير الجمعي للعدد $ع_٢$ ، أي أن :

$$(س_١ + ص_١ ت) - (س_٢ + ص_٢ ت) = (س_١ - س_٢) + (ص_١ - ص_٢) ت$$

وبالمثل نعرّف ناتج القسمة $\frac{ع_١}{ع_٢}$ ، حيث $ع_٢ \neq ٠$ ، بالشكل :

$$\frac{ع_١}{ع_٢} = ع_١ \cdot ع_٢^{-١}$$

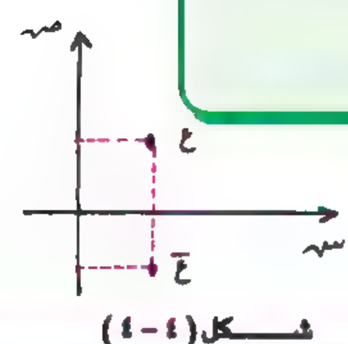
حيث $ع_٢^{-١}$ هو النظير الضربي للعدد $ع_٢$. ومن (٤ - ٦) نحصل على :

$$\frac{س_١ + ص_١ ت}{س_٢ + ص_٢ ت} = (س_١ + ص_١ ت) \cdot (\frac{س_٢}{س_٢^٢ + ص_٢^٢} - \frac{ص_٢}{س_٢^٢ + ص_٢^٢} ت)$$

$$= \frac{س_١ س_٢ + ص_١ ص_٢}{س_٢^٢ + ص_٢^٢} + \frac{ص_١ س_٢ - س_١ ص_٢}{س_٢^٢ + ص_٢^٢} ت \qquad (٤ - ٧)$$

تعريف (٤ - ٢)

لأي عدد مركب $ع = س + ص ت$ يسمى العدد المركب $س - ص ت$ مرافقاً للعدد $ع$ ويرمز له بالرمز $\bar{ع}$



شكل (٤ - ٤)

لاحظ أن $\bar{ع}$ هو صورة $ع$ بالتناظر حول محور الأعداد الحقيقية

كما في شكل (٤ - ٤) ، وأن

$ع \bar{ع} = (س + ص ت) (س - ص ت) = س^٢ + ص^٢ \geq ٠$

بهذا يمكن الحصول على المساواة (٤ – ٧) بضرب كلٍ من بسط ومقام العدد $\frac{ع_١}{ع_٢}$ في مرافق المقام :

$$\frac{س_١ + ص_١ ت}{س_٢ + ص_٢ ت} = \frac{(س_١ + ص_١ ت)\ (س_٢ - ص_٢ ت)}{(س_٢ + ص_٢ ت)\ (س_٢ - ص_٢ ت)}$$

$$= \frac{١}{س_٢^٢ + ص_٢^٢} \quad (س_١ + ص_١ ت)\ (س_٢ - ص_٢ ت)$$

لاحظ أيضا أن $\bar{ع_٢} \neq ٠$ إذا كان $ع_٢ \neq ٠$ وبصفة خاصة فإن :

$$(س + ص ت)^{-١} = \frac{١}{س + ص ت} = \frac{س - ص ت}{س^٢ + ص^٢} \quad ، \quad س + ص ت \neq ٠$$

بما يتفق مع (٤ – ٦) .

مثال (٤–٣) :

باعتبار $ع_١ = ١ + ٢ ت$

$ع_٢ = ٣ - ت$

أوجد $ع_١^{-١}$ ، $\frac{ع_١}{ع_٢}$

الحل :

$$ع_١^{-١} = \frac{١}{ع_١}$$

$$= \frac{١}{١ + ٢ ت}$$

$$= \frac{١ - ٢ ت}{١^٢ + ٢^٢}$$ بضرب كلٍ من البسط والمقام في $\bar{ع_١} = ١ - ٢ ت$

$$= \frac{١}{٥} - \frac{٢}{٥} ت$$

$$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{١ + ٢ ت}{٣ - ت}$$

$= \frac{(1+2ت)(3+ت)}{3^2+1^2}$ بضرب كل من البسط والمقام في $\bar{ع_2} = 3 + ت$

$= \frac{3-2}{10} + \frac{1+6}{10} ت$

$= \frac{1}{10} + \frac{7}{10} ت$

تدريب (٤ – ٥)

أثبت أن (أ) $\overline{ع_1 ع_2} = \bar{ع_1} \bar{ع_2}$ لأي $ع_1 ، ع_2 \in ك$

(ب) $\overline{\left(\frac{1}{ع}\right)} = \frac{1}{\bar{ع}}$ لكل $ع \neq 0$

(حـ) $\bar{\bar{ع}} = ع$ لكل $ع \in ك$

تمـــارين (٤ – ٢)

(١) ضع المقادير التالية في الصورة س + ص ت

(أ) $\frac{1}{1+ت}$ (ب) $\frac{1+ت}{1-ت}$ (حـ) $\frac{1-(1+ت)^2}{3-2ت}$ (د) $\frac{1}{1+ت} - \frac{1}{1-ت}$

(٢) على افتراض أن ع = س + ص ت بسّط المقادير التالية :

(أ) $ع + \bar{ع}$ (ب) $ع - \bar{ع}$ (حـ) $\frac{\bar{ع}}{ع}$ (د) $ع^2 - \bar{ع}^2$

(٣) أثبت أن الجزء الحقيقي للعدد المركب ع يساوي $\frac{1}{2}(ع + \bar{ع})$

وأن الجزء التخيلي هو $\frac{1}{2ت}(ع - \bar{ع})$.

(٤) أثبت أن مرافق $\bar{ع}$ هو $ع$ ، أي أن $\bar{\bar{ع}} = ع$.

(٥) ضع الأعداد التالية في الصورة س + ص ت

(أ) $ت^4$ (ب) $ت^5$ (حـ) $ت^7$ (د) $ت^8$ (هـ) $ت^{100}$

(و) $ت^{4ن}$ (حيث $ن \in ط$) (ز) $ت^{4ن+1}$ (ح) $ت^{4ن+2}$ (ط) $ت^{4ن+3}$

<u>إرشاد</u> : لاحظ أن $ت^{م+ن} = ت^م ت^ن$ وأن $ت^{م ن} = (ت^م)^ن$ لكل م ، ن $\in$ ط .

(٦) ضع المقادير التالية في الصورة س + ص ت

(أ) $(\sqrt{٢} + ت)(\sqrt{٢} - ت)$

(ب) $\frac{٢ + ت}{١ + ٢ ت} + \frac{٣ + ت}{١ - ٢ ت}$

(جـ) $\frac{(٧ + ٥ ت)(٣ - ٤ ت)}{٣ + ٤ ت}$

(د) $(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} ت)^٣ + (\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢} ت)^٣$

(هـ) $(\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} ت)^٤$

(٧) احسب ناتج القسمة $\frac{ع_١}{ع_٢}$ في كل من الحالات التالية :

(أ) $ع_١ = ١ + \sqrt{٣} ت$ ، $ع_٢ = \sqrt{٣} + ت$

(ب) $ع_١ = ت$ ، $ع_٢ = ١ - ت$

(جـ) $ع_١ = ١$ ، $ع_٢ = (-١ - ت)^٤$

(٨) هل ع = ت هو الحل الوحيد للمعادلة $ع^٢ = -١$ ؟ علل إجابتك .

(٩) أوجد حلول المعادلة $ع^٤ = ١$ في ك .

(١٠) أثبت أن المجموعة { ١ ، -١ ، ت ، - ت } بعملية الضرب المعرفة على ك هي زمرة دائرية مولدها العدد ت .

٤ - ٥ جذور المعادلة التربيعية

لو كانت الثمرة الوحيدة من إنشاء نظام الأعداد المركبة هو حل المعادلة $س^٢ + ١ = ٠$ ، لما استحقت منا الأعداد المركبة كل هذا الاهتمام ولكن الحقيقة هي أن النظام (ك ، + ، .)

يفتح لنا آفاقاً جديدة في حل المعادلات الجبرية ، ويسد ثغرات كثيرة كانت موجودة في هذا الموضوع . فلننظر إلى الأمثلة التالية :

(أ) حــل المعــادلات فــي كـ

مثال (٤-٤) :

أوجد جذور المعادلة $ع^{٢} - ٦ ع + ١٣ = ٠$

الحل :

بإكمال المربع على ع ، نحصل على :

$$(ع - ٣)^{٢} = ٩ - ١٣ = -٤$$

$$\Longleftarrow ع - ٣ = \pm \sqrt{-٤}$$

$$\Longleftarrow ع = ٣ \pm \sqrt{-٤}$$

وهي النتيجة نفسها التي نحصل عليها باستخدام قانون حل معادلة الدرجة الثانية :

$$ع = \frac{٦ \pm \sqrt{٣٦ - ٥٢}}{٢}$$

$$= ٣ \pm \sqrt{-٤}$$

$$= ٣ \pm \sqrt{٤} \sqrt{-١}$$

$$= ٣ \pm ٢ ت$$

حيث $ت = \sqrt{-١}$

نستنتج إذن أن للمعادلة جذرين هما ٣ + ٢ ت ، ٣ - ٢ ت .

وباستطاعة الطالب أن يتحقق من ذلك بالتعويض في المعـــادلة .

(لاحــظ أن هــذه المعـادلة لايـوجـد لـها جـذور حقيقية) .

والمثـال التـالي تعمـيم لمـا سبق :

مثال (٤ - ٥) .

أوجد جذور معادلة الدرجة الثانية :

$$أ\, ع^{٢} + ب\, ع + حـ = ٠ \qquad (٤ - ٨)$$

حيث أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية ، أ $\neq$ ٠ .

الحل :

من قانون حل معادلة الدرجة الثانية

$$ع = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ}}{٢ أ} \qquad (٤ - ٩)$$

نميز بين ثلاث حالات تحددها إشارة المقدار $ب^{٢} - ٤ أ حـ$.

الحالة الأولى : $ب^{٢} - ٤ أ حـ > ٠$

في هذه الحالة يكون للمعادلة جذران حقيقيان هما :

$$\frac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ}}{٢ أ} \quad ، \quad \frac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ}}{٢ أ}$$

الحالة الثانية : $ب^{٢} - ٤ أ حـ = ٠$

عندئذ يكون للمعادلة جذر واحد هو العدد الحقيقي $-\frac{ب}{٢ أ}$

الحالة الثالثة : $ب^{٢} - ٤ أ حـ < ٠$

في هذه الحالة نلاحظ أن :

$$\sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ} = \sqrt{-(٤ أ حـ - ب^{٢})}$$

$$= \sqrt{٤ أ حـ - ب^{٢}} \sqrt{-١}$$

$$= \sqrt{٤ أ حـ - ب^{٢}}\ ت$$

حيث $\sqrt{٤ أ حـ - ب^٢}$ عدد حقيقي لأن ٤ أ حـ − $ب^٢$ > ٠ .

فيترتب على ذلك أن للمعادلة (٤ − ٨) جذرين مركبين ، هما :

$$\frac{-ب}{٢ أ} + \frac{\sqrt{٤ أ حـ - ب^٢}}{٢ أ} ت \quad ، \quad \frac{-ب}{٢ أ} - \frac{\sqrt{٤ أ حـ - ب^٢}}{٢ أ} ت$$

بناء على ذلك بإمكاننا أن نبدي الملاحظات التالية على حلول المعادلة (٤ − ٨)

(١) لمعادلة الدرجة الثانية جذر واحد على الأقل ، أو جذران على الأكثر في ك .

(٢) جذرا المعادلة (٤ − ٨) المركبان مترافقان .

(٣) للمعادلة $ع^٢ + ١ = ٠$ جذران تخيليان هما ± ت .

تدريب (٤ − ٦)

(١) حــــل في ك كلاً من المعادلات الآتية :

(أ) $ع^٢ + ع + ١ = ٠$ (ب) $ع^٣ = ١$

(حـ) $ع^٤ = ٨١$ (د) $ع^٢ + ٢\sqrt{٢} ع + ٣ = ٠$

(٢) كوّن معادلة من الدرجة الثانية عرف جذراها كما يأتي :

(أ) الجذران : $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}$ ت ، $\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}$ ت

(ب) الجذران هما : $\sqrt{٣}$ − ت ، $\sqrt{٣}$ + ت .

(٣) ماهو الجذر الآخر لمعادلة من الدرجة الثانية أحد جذريها $\sqrt{٥}$ − ٢ ت ؟ وماهي المعادلة ؟

(ب) إيجاد الجذور التربيعية للعدد المركب :

مثال (٤ − ٥) :

احسـب الجـذور التربيعية للعدد ٣ + ٤ ت

الحل :

على افتراض أن س + ص ت هي الصورة العامة للجذر التربيعي ، فإن :

$$(س + ص ت)^{٢} = ٣ + ٤ ت$$

$$س^{٢} - ص^{٢} + ٢ س ص ت = ٣ + ٤ ت$$

$$\Longleftarrow \quad س^{٢} - ص^{٢} = ٣ \quad ، \quad ٢ س ص = ٤$$

نستنتج من المعادلة الثانية أن س $\neq$ ٠ ، ص $\neq$ ٠ وبتعويض ص = $\frac{٢}{س}$ في المعادلة

الأولى نجد أن :

$$س^{٢} - \left(\frac{٢}{س}\right)^{٢} = ٣$$

$$(س^{٢})^{٢} - ٣س^{٢} - ٤ = ٠ \qquad \text{بعد الضرب في } س^{٢} \text{ وإعادة الترتيب}$$

$$(س^{٢} - ٤)(س^{٢} + ١) = ٠ \qquad \text{بعد تحليل الطرف الأيمن}$$

$$\Longleftarrow \quad س^{٢} - ٤ = ٠ \quad أو \quad س^{٢} = -١$$

مما يعني أن : س = $\pm$ ٢ ، س = $\pm$ ت

ولكن بما أن س عدد حقيقي ، نستبعد الحالة س = $\pm$ ت

في حالة س = ٢ تكون ص = $\frac{٢}{س}$ = ١ ، وفي حالة س = − ٢ تكون ص = $\frac{٢}{س}$ = − ١

إذن للعدد ٣ + ٤ ت جذران تربيعيان هما $\pm$ (٢ + ت) .

تدريب (٤ - ٧)

تحقق من نتيجة المثال (٤ - ٥) بتربيع كلٍ من الجذرين .

مثال (٤ - ٦) .

أوجد الجذور التربيعية للعدد − ت

الحل :

افرض أن س + ص ت هي الصورة العامة للجذر التربيعي ، إذن :

$$(س + ص ت)^2 = - ت$$

$$(س^2 - ص^2) + (2 س ص) ت = - ت$$

$$\Longleftarrow س^2 - ص^2 = 0 \quad ، \quad 2 س ص = - 1$$

من المعادلة الثانية نحصل على ص = $- \frac{1}{2 س}$ فنعوض في :

المعادلة الأولى للحصول على $س^2 - \frac{1}{4 س^2} = 0$ ، $س^4 = \frac{1}{4}$

$\Longleftarrow س^2 = \frac{1}{2}$ ، وقد استبعدنا $س^2 = - \frac{1}{2}$ لأن س $\in$ ح

$\Longleftarrow س = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

عندما س = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ فإن ص = $- \frac{\sqrt{2}}{2} = - \frac{1}{\sqrt{2}}$

وعندما س = $- \frac{1}{\sqrt{2}}$ فإن ص = $- \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

إذا جذرا العدد $-$ ت هما : $\pm (\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} ت)$

تدريب (٤ - ٨)

(١) تحقق من نتيجة المثال (٤ - ٦) بتربيع كلٍ من الجذرين :

(٢) أوجد الجذور التربيعية للأعداد الآتية :

(أ) $- ٣ + ٤$ ت (ب) $١٢ - ٥$ ت (حـ) $- ٦ - ٨$ ت (د) $١ + \sqrt{٣}$ ت

تمارين (٤ - ٣)

أوجد جذور المعادلات التالية :

(١) $ع^2 + ٩ = ٠$ (٢) $٣ ع^2 + ٤ ع + ٢ = ٠$

(٣) $ع^2 + ع + ١ = ٠$ (٤) $ع^2 = ٣ ع - \frac{٩}{٤}$

استخرج الجذور التربيعية لكل من المقادير التالية :

(٥) ت

(٦) $\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

(٧) ٣ − ٤ ت

أوجد قيم س وَ ص الحقيقيتين في كل من المعادلات التالية :

(٨) (٤ + ٣ ت) (س − ص ت) = ١

(٩) (١ − ت) (س + ص ت)^{٢} = ٢٥ (١ + ت)

أوجد س ، ص ∈ ح التي تحقق المعادلة

(١٠) (س + ص ت) (س − ص ت) = ٠

(١١) (س + ص ت) (س − ص ت) = ١

(١٢) أوجد جميع جذور المعادلة ع^{٣} + ع^{٢} + ع + ١ = ٠

(١٣) أوجد ع التي تحقق ع^{٢} + $\frac{١}{ع^{٢}}$ = − ٢

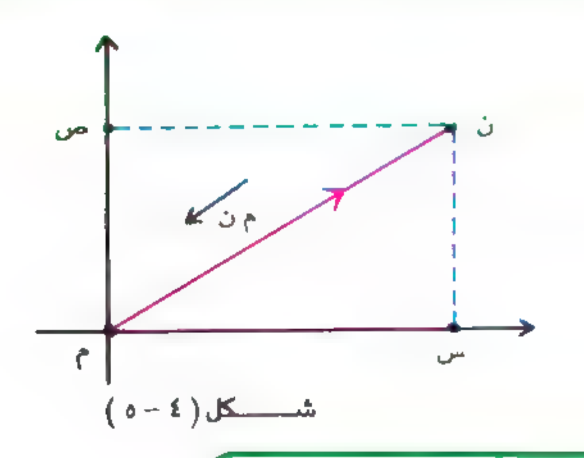
(١٤) أوجد ع التي تحقق ع^{٢} = $\frac{٢}{ع^{٢}}$ + ١

٤ − ٦ التمثيل الهندسي للأعداد المركبة

(أ) القيمة المطلقة للعدد المركب

أشرنا في البند (٤− ٣) إلى إمكانية تمثيل العدد المركب س + ص ت بالنقطة ن = (س ، ص) في المستوي الإحداثي .

ولكن النقطة ن في المستوى تحدد قطعة المستقيم الموجهة من نقطة الأصل م = (٠ ، ٠) إلى ن ، والتي يرمز لها بـ $\overleftarrow{\text{م ن}}$ وتسمى <u>متجهاً</u> من م إلى ن وعليه فإن المتجه $\overleftarrow{\text{م ن}}$ هو ممثل آخر للعدد المركب س + ص ت



شكل (٤ - ٥)

تعريف (٤ - ٣)

القيمة المطلقة للعدد المركب ع = س + ص ت ، والتي يرمز لها بالرمز | ع | ،
تعرف بأنها | ع | = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$

يتضح من هذا التعريف أن القيمة المطلقة للعدد المركب هي عدد حقيقي غير سالب .

وإذا كان العدد المركب ع ممثلاً بالمتجه $\overleftarrow{\text{م ن}}$ فإن | ع | تساوي طول المتجه $\overleftarrow{\text{م ن}}$ حسب نظرية فيثاغورس ، أي المسافة بين م وَ ن ، كما هو واضح من الشكل (٤ - ٦) .

وبما أن : $\text{ع}\,\bar{\text{ع}} = (\text{س} + \text{ص ت})(\text{س} - \text{ص ت})$

$= \text{س}^2 + \text{ص}^2$

فإن : $|\text{ع}| = \sqrt{\text{ع}\,\bar{\text{ع}}}$

$|\text{ع}|^2 = \text{ع}\,\bar{\text{ع}}$

ص
ن
$\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$
م
س

شكل (٤ - ٦)

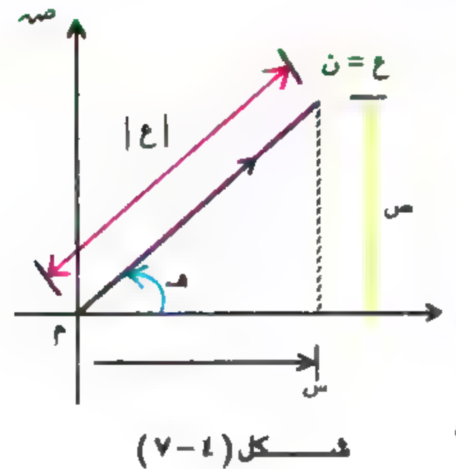
وتأخذ الصيغتان (٤ - ٦) وَ (٤ - ٧) الشكل التالي

$$\frac{1}{\text{ع}} = \text{ع}^{-1} = \frac{\bar{\text{ع}}}{|\text{ع}|^2}$$

$$\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \frac{\text{ع}_1\,\bar{\text{ع}}_2}{|\text{ع}_2|^2} \qquad (٤ - ١٠)$$

تدريب (٤ - ٩)

أثبت أن $|\bar{ع}| = |ع|$ وأن $|ع_1 ع_2| = |ع_1||ع_2|$.



شـكل (٤ - ٧)

(ب) الصيغة المثلثية للعدد المركب :

سبق أن أشرنا إلى إمكانية تمثيل العدد المركب

ع = س + ص ت

في المستوي الإحداثي بالنقطة ن ذات الإحداثي السيني س والصادي ص . والآن سنتعرف على طريقة أخرى للتعبير عن ع . انظر إلى الشكل (٤ - ٧) ولاحظ أن :

س = | ع | جتا هـ

ص = | ع | جا هـ

حيث هـ هي الزاوية المحصورة بين نصف المستقيم [م س ونصف المستقيم [م ن ، فهي تحدد الدوران الذي يحول [م س إلى [م ن وسنتفق على اعتبار هـ موجبة إذا كان هذا الدوران في عكس اتجاه عقارب الساعة ، وسالبة إذا كان في اتجاه عقارب الساعة ففي الشكل (٤ - ٧) نلاحظ أن هـ > ٠ ، بينما هـ < ٠ في الشكل (٤ - ٨) تسمى هـ الزاوية القطبية للعدد المركب ع .

وبوسعنا الآن أن نعبر عن ع بدلا له القيمة المطلقة والزاوية القطبية بالشكل التالي

ع = س + ص ت

= | ع | (جتا هـ + ت جاهـ) (٤ - ١١)

تسمى هذه الصيغة الأخيرة بالصيغة المثلثية للعدد المركب ع ،

كما تسمى الصيغة س + ص ت بالصيغة الديكارتية (أو الجبرية)

شـكل (٤ - ٨)

مثال (٤ - ٧) :

ضع العدد المركب في كل من الحالات التالية في الصيغة الديكارتية :

(١) $|ع_١| = ٢$ ، $هـ_١ = ٤٥^\circ$

(٢) $|ع_٢| = ١$ ، $هـ_٢ = ٢٧٠^\circ$

(٣) $|ع_٣| = ١$ ، $هـ_٣ = -٩٠^\circ$

شكل (٤-٩)

الحل :

(١) $ع_١ = |ع_١| \, (جتا \, هـ_١ + ت \, جا \, هـ_١)$

$= ٢ \, (جتا \, (٤٥^\circ) + ت \, جا \, (٤٥^\circ))$

$= ٢ \, (\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} ت)$

$= \sqrt{٢} + \sqrt{٢} \, ت$

(٢) $ع_٢ = |ع_٢| \, (جتا \, هـ_٢ + ت \, جا \, هـ_٢)$

$= جتا \, (٢٧٠^\circ) + ت \, جا \, (٢٧٠^\circ)$

$= - ت$

(٣) $ع_٣ = |ع_٣| \, (جتا \, هـ_٣ + ت \, جا \, هـ_٣)$

$= جتا \, (-٩٠^\circ) + ت \, جا \, (-٩٠^\circ)$

$= - ت$



شكل (٤-١٠)

نلاحـــظ في هذا المثال أن :

$ع_٢ = ع_٣$ بالرغم من أن $هـ_٢ \neq هـ_٣$ ، أي أن العدد المركب له أكثر من زاوية قطبية واحدة .

ولكن إذا اشترطنا أن تكون $٠ \leqslant هـ < ٣٦٠^\circ$ فإن كل عدد مركب يصبح له زاوية قطبية واحدة ،

كما يتضح من المثـــال التالي :

مثال (٤-٨):-

أوجد الزوايا القطبية لكل من الأعداد المركبة التالية في الفترة [٠° ، ٣٦٠°) ومن ثم ضع العدد في الصيغة المثلثية :

(١) $ع_١ = ١ - ت$ (٢) $ع_٢ = -٧$ (٣) $ع_٣ = -١ + \sqrt{٣}ت$

الحل :

(١) $|ع_١| = \sqrt{١ + (-١)^٢}$

$= \sqrt{٢}$

بما أن : $ع_١ = ١ - ت$

$= \sqrt{٢}$ (جتا $هـ_١$ + ت جا $هـ_١$)

فإن : جتا $هـ_١ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا $هـ_١ = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$

شكل (٤-١١)

ومن الشكل (٤ - ١١) واضح أن الحل الوحيد لهاتين المعادلتين في [٠° ، ٣٦٠°) هو :

$هـ_١ = ٣١٥°$

وبالتالي : $ع_١ = \sqrt{٢}$ (جتا ٣١٥° + ت جا ٣١٥°)

(٢) $|ع_٢| = |-٧|$

$= ٧$

$ع_٢ = -٧$

$= ٧$ (جتا $هـ_٢$ + ت جا $هـ_٢$)

$= ٧ (-١ + ٠ ت)$

⟸ جتا $هـ_٢ = -١$ ، جا $هـ_٢ = ٠$ ، ٠° ≤ $هـ_٢$ < ٣٦٠°

⟸ $هـ_٢ = ١٨٠°$

⟸ $ع_٢ = ٧$ (جتا ١٨٠° + ت جا ١٨٠°)

شكل (٤-١٢)

(٣) $|ع_٣| = \sqrt{(-١)^٢ + (\sqrt{٣})^٢}$

$= ٢$

جتا $هـ_٣ = -\frac{١}{٢}$ ، جا $هـ_٣ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$٠ \leqslant هـ_٣ < ٣٦٠^\circ$

$\Leftarrow هـ_٣ = ١٢٠^\circ$

$\Leftarrow ع_٣ = ٢$ (جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°)

شكل (٤-١٣)

تدريب (٤ - ١٠)

(١) اكتب بالصيغة المثلثية كلاً من الأعداد المركبة الآتية :

ع = ٢ ، ع = -٥ ، ع = ٦ ت ، ع = -٢ ت

ع = $\sqrt{٣}$ + ت ، ع = -١ - ت ، ع = ١ - ت ، ع = -١ + ت

(٢) اكتب العدد المركب بالصيغة : س + ص ت إذا كان :

(أ) $|ع| = \sqrt{٢}$ ، هـ = ٢٢٥° (ب) $|ع| = \sqrt{٣}$ ، هـ = ١٢٠°

(جـ) التفسير الهندسي لعملية الجمع $ع_١ + ع_٢$

(أ) لنفرض أن العددين المركبين

$ع_١ = س_١ + ص_١$ ت

$ع_٢ = س_٢ + ص_٢$ ت

ممثلان بالنقطتين

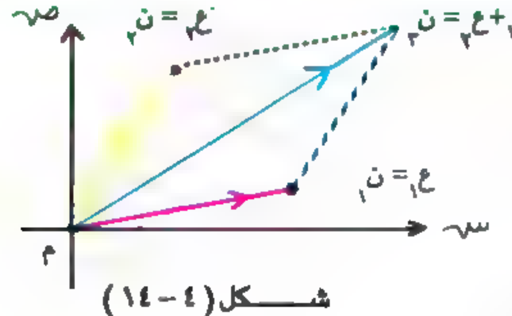
$ن_١ (س_١ ، ص_١)$ ، $ن_٢ (س_٢ ، ص_٢)$

على الترتيب ، إذن المجموع

$ع_1 + ع_2 = (س_1 + س_2) + (ص_1 + ص_2)\,ت$

ممثل بالنقطة $ن_3\,(س_1 + س_2 \,،\, ص_1 + ص_2)$

الآن لاحظ أن :



شكل (٤ - ١٤)

ميل المستقيم $م\,ن_1$ = ميل المستقيم $ن_2\,ن_3$ = $\frac{ص_1}{س_1}$

ميل المستقيم $م\,ن_2$ = ميل المستقيم $ن_1\,ن_3$ = $\frac{ص_2}{س_2}$

فنستنتج من ذلك أن $م\,ن_1 \parallel ن_2\,ن_3$ ، $م\,ن_2 \parallel ن_1\,ن_3$ وأن الشكل الرباعي $م\,ن_1\,ن_3\,ن_2$ متوازي أضلاع . أي أن مجموع العددين $ع_1$ ، $ع_2$ ممثل بالرأس الرابع لمتوازي الأضلاع الذي رؤوسه الأخرى هي $ن_1$ ، م ، $ن_2$ ، كما هو واضح من الشكل (٤ - ١٤) .



(د) أما التفسير الهندسي لعملية الضرب $ع_1ع_2$

فتتضح بشكل جلي إذا عبرنا عن $ع_1$ ، $ع_2$

بالصيغة المثلثية :

$ع_1 = |ع_1|\,(جتا\,هـ_1 + ت\,جا\,هـ_1)$

$ع_2 = |ع_2|\,(جتا\,هـ_2 + ت\,جا\,هـ_2)$

$\Longleftarrow ع_1ع_2 = |ع_1|\,|ع_2|\,[(جتا\,هـ_1\,جتا\,هـ_2 - جا\,هـ_1\,جا\,هـ_2) +$

$ت\,(جتا\,هـ_1\,جا\,هـ_2 + جا\,هـ_1\,جتا\,هـ_2)]$ (٤ - ١٢)

شكل (٤ - ١٥)

ومن المتطابقتين (٣ - ١٨) ، (٣ - ٢٠) نجد :

$جتا\,هـ_1\,جتا\,هـ_2 - جا\,هـ_1\,جا\,هـ_2 = جتا\,(هـ_1 + هـ_2)$

$جتا\,هـ_1\,جا\,هـ_2 + جا\,هـ_1\,جتا\,هـ_2 = جا\,(هـ_1 + هـ_2)$

وبذلك تأخذ الصيغة (٤ - ١١) الشكل :

$$ع_1 ع_2 = |ع_1|\,|ع_2|\,[\text{جتا}(هـ_1 + هـ_2) + ت\ \text{جا}(هـ_1 + هـ_2)] \qquad (٤ - ١٣)$$

أي أن حاصل الضرب $ع_1 ع_2$ ممثل بالمتجه الذي طوله يساوي حاصل ضرب الطولين $|ع_1|$ ، $|ع_2|$ وزاويته القطبية هي مجموع الزاويتين $هـ_1$ ، $هـ_2$

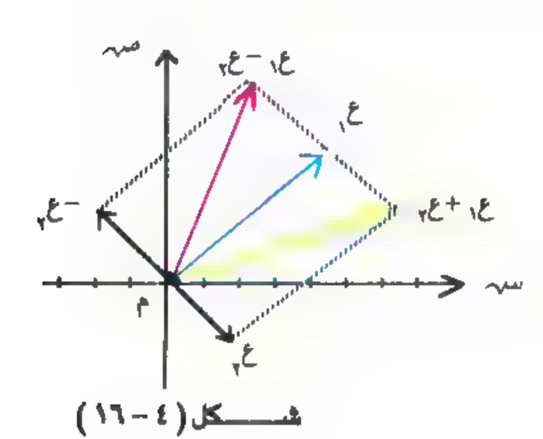
مثال (٤ - ٩)

استخدم الرسم للحصول على : $ع_1 + ع_2$ ، $ع_1 - ع_2$ ، $ع_1 ع_2$

باعتبار $ع_1 = ٣ + ٣ت$ ، $ع_2 = \sqrt{٣} - ت$

الحل :

يوضح الشكل (٤ - ١٦) أن $ع_1 + ع_2$ هو الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع الذي رؤوسه محددة بـ $ع_1$ ، م ، $ع_2$.



شكل (٤ - ١٦)

كما أن $ع_1 - ع_2 = ع_1 + (-ع_2)$ هو الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع الذي رؤوسه الأخرى هي $ع_1$ ، م ، $-ع_2$.

وللحصول على $ع_1 ع_2$ نلاحظ أن :

$|ع_1| = \sqrt{٩ + ٩} = ٣\sqrt{٢}$

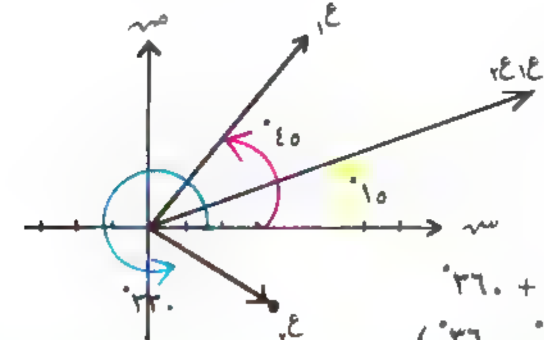
$|ع_2| = \sqrt{٣ + ١} = ٢$

$هـ_1 = ٤٥^\circ$ (لماذا ؟)

$هـ_2 = ٣٣٠^\circ$ (لماذا ؟)

إذن $ع_1 ع_2$ ممثل بالمتجه الذي طوله

$|ع_1|\,|ع_2| = ٦\sqrt{٢}$



شكل (٤ - ١٧)

وزاويته $هـ_1 + هـ_2 = ٤٥^\circ + ٣٣٠^\circ = ٣٧٥^\circ = ١٥^\circ + ٣٦٠^\circ$

لاحظ أن الزاوية التي تمثل $هـ_1 + هـ_2$ في الفترة $[٠^\circ ، ٣٦٠^\circ)$ هي $هـ_1 + هـ_2 = ١٥^\circ$ كما هو واضح من الشكل (٤ - ١٧) .

تدريب (٤ – ١١)

(١) في المثال (٤ – ٩) أوجد المتجه الذي يمثل العدد المركب $ع_٢ - ع_١$ ثم تحقق من أن :

$ع_٢ - ع_١ = - (ع_١ - ع_٢)$ مستخدماً الرسم .

(٢) إذا كان $ع_١ = |ع_١| (حتاهـ_١ + ت حا هـ_١)$ ، $ع_٢ = |ع_٢| (حتا هـ_٢ + ت حا هـ_٢)$ ،

$ع_٣ = |ع_٣| (جتا هـ_٣ + ت حا هـ_٣)$ فاثبت أن

$ع_١ \cdot ع_٢ \cdot ع_٣ = |ع_١| \cdot |ع_٢| \cdot |ع_٣| (حتا (هـ_١ + هـ_٢ + هـ_٣) +$

$ت حا (هـ_١ + هـ_٢ + هـ_٣))$

إرشاد : لاحظ أن : $ع_١ \cdot ع_٢ \cdot ع_٣ = (ع_١ \cdot ع_٢) \cdot ع_٣$ ، ثم طبق (٤ – ١٣) مرتين .

(٣) أوجد ناتج $٣ (حتا \frac{ط}{٣} + ت حا \frac{ط}{٣}) \times ٢ (حتا \frac{ط}{٦} + ت حا \frac{ط}{٦})$

(٣) قانـــون دي موافـــر :

من الصيغة المثلثية (٤ – ١٣) لحاصل الضرب $ع_١ ع_٢$ نستخلص أنه إذا كان :

$ع = |ع| (جتا هـ + ت جا هـ)$

فإن : $ع^٢ = |ع|^٢ (جتا٢هـ + ت جا٢هـ)$ (٤ – ١٤)

$ع^٣ = |ع|^٣ (جتا٣هـ + ت جا٣هـ)$

⋮

$ع^ن = |ع|^ن [جتا (ن هـ) + ت جا (ن هـ)]$ لكل عدد طبيعي ن (٤ – ١٥)

وعندما تكون $|ع| = ١$ فإننا نحصل على العلاقة الهامة :

$(جتا هـ + ت حا هـ)^ن = جتا (ن هـ) + ت جا (ن هـ)$ (٤ – ١٦)

والتي تعرف بنظرية دي موافر (De Moivre)

تدريب (٤ – ١٢)

(١) اكتب تفصيلاً لبرهان (٤ – ١٤) ثم استنتج (٤ – ١٥)

(٢) احسب $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{ت}{٢} \right)^{١٨}$

(٤) عملية القسمة :

لعلك تستنتج بسهولة أن مرافق ع = | ع | (جتا هـ + ت جا هـ) هـو :

$\bar{ع}$ = | ع | (جتا هـ – ت جا هـ) (٤ – ١٧)

وبما أن حتا (– هـ) = حتا هـ ، حا (– هـ) = – حا هـ (لماذا ؟)

فإن بوسعنا أن نعيد كتابة (٤ – ١٧) بالشكل :

$\bar{ع}$ = | ع | (حتا (– هـ) + ت حا (– هـ)) (٤ – ١٨)

سنترك لك استخدام (٤ – ١٠) ، (٤ – ١٨) ، (٤ – ١٣)

لتحصل على ناتج قسمة $ع_١$ = | $ع_١$ | (حتا $هـ_١$ + ت حا $هـ_١$)

على $ع_٢$ = | $ع_٢$ | (حتا $هـ_٢$ + ت حا $هـ_٢$) ≠ ٠

لتحصل على : $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{|ع_١|}{|ع_٢|}$ (حتا ($هـ_١$ – $هـ_٢$) + ت حا ($هـ_١$ – $هـ_٢$)) (٤ – ١٩)

مثال (٤ – ١٠) :

باعتبار $ع_١$ = ٣ + ٣ ت ، $ع_٢$ = $\sqrt{٣}$ – ت كما في مثال (٤ – ٩) ، احسب :

$ع_١^{٢}$ ، $ع_٢^{٦}$ ، $\frac{ع_١}{ع_٢}$ باستخدام الصيغة المثلثية .

الحل :

بالرجوع إلى مثال (٤ – ٩) نجد أن :

| $ع_١$ | = ٣ $\sqrt{٢}$ ، | $ع_٢$ | = ٢ ، $هـ_١$ = ٤٥° ، $هـ_٢$ = ٣٣٠°

ومن (٤ – ١٣) فإن :

$ع_1^{\,٢} = |ع_1|^٢$ [جتا (٢ هـ$_1$) + ت جا (٢ هـ$_1$)]

= $(٣\sqrt{٢})^٢$ [جتا ٩٠° + ت جا ٩٠°]

= ١٨ (٠ + ت)

= ١٨ ت

$ع_2^{\,٦} = ٢^٦$ [جتا (٦ × ٣٣٠°) + ت جا (٦ × ٣٣٠°)]

= ٦٤ [جتا (١٩٨٠°) + ت جا (١٩٨٠°)]

= ٦٤ [جتا (١٨٠°) + ت جا (١٨٠°)] (لماذا ؟)

= ٦٤ [− ١ + ٠]

= − ٦٤

ومن (٤ − ١٩) نحصل على :

$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$ [جتا(٤٥° − ٣٣٠°) + ت جا (٤٥° − ٣٣٠°)]

= $\frac{٣}{\sqrt{٢}}$ [جتا (− ٢٨٥°) + ت حا (− ٢٨٥°)]

= $\frac{٣}{\sqrt{٢}}$ [جتا ٧٥° + ت جا ٧٥°] (لماذا ؟)

≈ ٢٫١٢ [٠٫٢٥٩ + ت ٠٫٩٦٦]

≈ ٠٫٥٥ + ٢٫٠٥ ت

تدريب (٤ − ٩٣)

أوجـد ناتج كل مما يأتي :

(١) ٤ (حتا $\frac{٢ط}{٣}$ + ت حا $\frac{٢ط}{٣}$) × ٢ (حتا $\frac{ط}{٣}$ + ت حا $\frac{ط}{٣}$)

(٢) ٦ (حتا $\frac{ط}{٢}$ + ت حا $\frac{ط}{٢}$) ÷ ٣ (حتا $\frac{ط}{٤}$ + ت حا $\frac{ط}{٤}$)

(٣) $[٢($ حتا $\frac{ط}{٦}$ + ت حا $\frac{ط}{٦}$ $)]^٦$

(٤) [حتا $\frac{ط}{٤}$ + ت حا $\frac{ط}{٤}$ $]^٨$

تمارين (٤ – ٤)

(١) ارسم المتجهات التي تمثل الأعداد التالية :

(أ) – ٦ (ب) $\sqrt{3}$ – ٣ ت (حـ) ت (د) – ١٠ – ١٠ ت

(٢) أوجد القيمة المطلقة | ع | والزاوية القطبية هـ ∈ [٠ ، ٣٦٠°) لكل من الأعداد المركبة في التمرين (١) ، ثم ضع كلاً من هذه الأعداد في الصيغة المثلثية .

(٣) اكتب الأعداد التالية بالصورة س + ص ت :

(أ) $\sqrt{2}$ (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°) (ب) جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°

(حـ) ٢ (جتا ٩٠° + ت جا ٩٠°) (د) ٥ (جتا ١٨٠° + ت جا ١٨٠°)

(هـ) ١٠٠ [جتا (– ١٥°) + ت جا (– ١٥°)]

(٤) ارسم المتجهات الممثلة للأعداد :

$ع_1$ = ٥ + ٥ ت ، $ع_2$ = ٤ – ت ، $ع_3$ = ٢ ت

ثم عين على المستوى المركب المتجهات الممثلة للأعداد

(أ) $ع_1 + ع_2$ (ب) $ع_1 + ع_2 - ع_3$ (حـ) $ع_1 ع_2$ (د) $ع_1 ع_2 ع_3$ (هـ) $\frac{ع_1}{ع_2}$

(٥) استخدم متباينة المثلث ، والتي تنص على أن مجموع طولي أي ضلعين في مثلث لايقل عن طول الضلع الثالث في إثبات أن :

$|ع_1| + |ع_2| \geqslant |ع_1 + ع_2|$ لكل $ع_1$ ، $ع_2$ ∈ ك

(٦) استخدم الصيغة (٤ – ١٣) لإيجاد $ع_1$ $ع_2$ ، حيث $ع_1$ = ١ + ت ، $ع_2$ = – ٣ + ٣ ت .
وضح إجابتك بالرسم .

(٧) استخدم الصيغة (٤ – ١٥) لحساب كلٍ من القوى التالية :

(أ) $ت^{7}$ (ب) $(١ + ت)^{١٠}$ (حـ) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{ت}{2}\right)^{٢٥}$ (د) $(١ - \sqrt{3}\,ت)^{١٤}$

(٨) استخدم الصيغة (٤ – ١٩) لإيجـاد :

(أ) $\frac{١ + ت}{ت}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣} + ت}{١ - ت}$ (حـ) $\frac{(١ + ت)^{٣}}{١ - \sqrt{٣} ت}$

(٤ – ٧) الـجـــذور التكـعـيـبـية للعـــدد ١

نحن نعلم من دراستنا السابقة أن للعدد الحقيقي ١ جذراً تكعيبياً واحداً هو . $\sqrt[٣]{١} = ١$

وذلك لأن المعادلة $ع^{٣} = ١$ (٤ – ٢٠)

ليس لها حل في ح سوى ع = ١ أما إذا سمحنا للعدد ع بأن يكون عدداً مركباً فإن الوضع يختلف ، وسنجد عندئذ أن للمعادلة (٤ – ٢٠) جذرين إضافيين في ك .

لنفرض أن ع = س + ص ت جذر تكعيبي للعدد ١ ، فهو إذن يحقق المعادلة (٤ – ٢٠)

$$ع^{٣} = ١$$

$$\Longleftarrow \quad ع^{٣} - ١ = ٠$$

$$\Longleftarrow \quad (ع - ١)(ع^{٢} + ع + ١) = ٠$$ بتحليل الطرف الأيمن

إذن : ع – ١ = ٠ أو $ع^{٢} + ع + ١ = ٠$

من المعادلة الأولى نحصل على : ع = ١

ومن المعادلة الثانية نحصل باستخدام القانون (٤ – ٩) على :

$$ع = \frac{-١ + \sqrt{١ - ٤}}{٢} = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$$

وبذلك نجد أن للعدد الحقيقي ١ ثلاثة جذور :

الأول منها هو الجذر الحقيقي المعروف سلفاً $ع_{١} = ١$

والجذران الآخران هما العددان المركبان المترافقان

$$ع_{٢} = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$$

$$ع_{٣} = -\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت = \bar{ع}_{٢}$$

لاحظ أن $|ع_٣| = \sqrt{\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤}}$

$= ١$

$= |ع_٢|$

مما يدل على أن الجذور الثلاثة جميعها تقع على الدائرة $|ع|^٢ = س^٢ + ص^٢ = ١$ التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها واحـد .

لاحظ أيضا أن زاوية $ع_٣$ القطبية $هـ_٣$ ، تحـقق :

$$جتا\ هـ_٣ + ت\ جا\ هـ_٣ = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$$

$$\Longleftarrow\ جتا\ هـ_٣ = -\frac{١}{٢} \quad ، \quad جا\ هـ_٣ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

فإذا كان $٠ \leqslant هـ_٣ < ٣٦٠^\circ$ نتج عن ذلك أن $هـ_٣ = ١٢٠^\circ$

وبما أن $ع_٢ = \overline{ع_٣}$ فـإن الزاويـة القطبيـة للـجذر $ع_٢$ تسـاوي $- هـ_٣ = -١٢٠^\circ$، أي أن $هـ_٢$ ممثلة في الفترة $[٠^\circ ، ٣٦٠^\circ)$ بالزاوية $هـ_٢ = -١٢٠^\circ + ٣٦٠^\circ = ٢٤٠^\circ$

شـــكل (٤ – ١٨)

جـذور العدد ١ التكعيبية

وبذلك نحصل على توزيع الجذور التكعيبية $ع_١ ، ع_٢ ، ع_٣$ للعدد ١ على دائرة الوحده المبين في الشكل (٤ – ١٨) ، حيث تفصل الزاوية ١٢٠° بين كل جذر والذي يليه . لاحظ أن النـقاط $ع_١ ، ع_٢ ، ع_٣$ هي رؤوس مثلث متطابق الأضلاع مرسوم في دائرة الوحدة (لماذا ؟)

تدريب (٤ – ١٤)

(١) تحقق من أن $ع_٢^٣ = ع_٣^٣ = ١$

(٢) أثبت أن $ع_٣ = ع_٢^٢$ وأن $ع_٢ = ع_٣^٢$

(٣) أثبت أن المجموعة $\{ع_١ ، ع_٢ ، ع_٣\}$ بعملية الضرب على كـ هي زمرة دائرية يولدها العدد $ى = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$ بحيث $ع_٢ = ى ، ع_٣ = ى^٢ ، ع_١ = ى^٣$

مثال (٤ – ١١)

احسب الجذور التكعيبية للعدد ٨ .

الحل :

المطلوب هو إيجاد العدد المركب ع الذي يحقق $ع^{٣} = ٨ = ٢^{٣}$ $\Longleftrightarrow$ $\left(\frac{ع}{٢}\right)^{٣} = ١$

وقد وجدنا أن مجموعة الحل لهذه المعادلة الأخيرة هي الجذور التكعيبية للواحد ، أي .

$$\left\{ ١ ، -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت ، -\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت \right\} = \left\{ ١ ، ى ، \bar{ى} \right\}$$

إذن :

$$\frac{ع}{٢} \in \left\{ ١ ، ى ، \bar{ى} \right\}$$

$$\Longleftarrow ع \in \left\{ ٢ ، ٢ى ، ٢\bar{ى} \right\}$$

أي أن الجذور التكعيبية للعدد ٨ هي ٢ ، $-١ + \sqrt{٣}ت$ ، $-١ - \sqrt{٣}ت$

لاحظ هنا أن الجذور لا تختلف عن نظيراتها الجذور التكعيبية للعدد ١ إلا من حيث القيمة المطلقة ، فهي موزعة بانتظام على الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $\sqrt[٣]{٨} = ٢$ ، كما في الشكل (٤ – ١٩) ، وأولها هو الجذر الحقيقي ٢ المعروف على الزاوية القطبية ٠° . والثاني على زاوية ١٢٠° ، والثالث على زاوية ٢٤٠° .

شكل (٤ – ١٩)
جذور العدد ٨ التكعيبية

تدريب (٤ – ١٥)

أثبت أن مجموع الجذور التكعيبية للعدد ١ يساوي الصفر ، ومن ثم استنتج أن مجموع الجذور التكعيبية للعدد ٨ أيضا يساوي الصفر .

مثال (٤ – ١٢) :

أوجد الجذور التكعيبية للعدد الحقيقي – ١

الحل :

افرض أن ع أحد جذور – ١ التكعيبية إذن :

$$\text{ع}^{٣} = -١ = (-١)^{٣}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{\text{ع}}{-١}\right)^{٣} = (-\text{ع})^{٣} = ١$$

فنستنتج أن – ع جذر تكعيبي للعدد ١، فهي بالتالي تنتمي إلى المجموعة { ١ ، ى ، ى̄ } ، أي أن :

$$\text{ع} \in \{ -١ ، -\text{ى} ، -\bar{\text{ى}} \}$$

إذن جذور العدد – ١ التكعيبية هي :

$$-١ ، \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت} ، \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}$$

شكل (٤ – ٢٠)
جذور العدد – ١ التكعيبية

تمارين (٤ – ٥)

(١) استخدم فكرة المثال (٤ – ١١) لإيجاد الجذور التكعيبية للأعداد التالية :

(أ) ٢٧ (ب) $\frac{٢٧}{١٢٥}$

وضح إجابتك بالرسم

(٢) استخدم فكرة المثال (٤ – ١٢) لإيجاد الجذور التكعيبية للأعداد التالية :

(أ) – ٨ (ب) – $\frac{١}{٦٤}$

وضح إجابتك بالرسم

(٣) استخرج الجذور التكعيبية للعدد التخيلي – ت بحل المعادلة $\text{ع}^{٣} = -\text{ت}$. مثل هذه الجذور في المستوى .

(٤) إذا كان ع = | ع | (جتا هـ + ت حا هـ) فاستخدم الصيغة (٤ – ١٣) لاستنتاج أن حاصل الضرب ت ع هو العدد المركب الناتج من دوران ع بزاوية ٩٠° حول نقطة الأصل ، أي أن عملية الضرب في العدد التخيلي ت هو التحويل الهندسي في المستوي المركب الناتج من الدوران بزاوية ٩٠° حول نقطة الأصل .

(٥) استخدم نتيجة التمرين (٤) في تمثيل الجذور التكعيبية للعدد – ت المطلوبة في التمرين (٣)

(٦) عبر عن الجذور التكعيبية لأي عدد حقيقي موجب س بدلالة الجذر الموجب $\sqrt[3]{س}$ والعدد المركب ى = $-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

(٧) كرر المطلوب في التمرين (٦) بالنسبة لأي عدد حقيقي سالب .

(٨) أثبت أن مجموع الجذور التكعيبية لأي عدد حقيقي يساوي الصفر .

تمارين عامة

١ – بسط المقادير التالية بوضعها في الصورة س + ص ت :

(أ) $\frac{١}{١ - \sqrt{٣}ت}$

(ب) $(١ + ت)^{٨}$

(حـ) $\frac{(٢ + ت)(١ + ت)}{(١ - ت)(١ - ٢ت)}$

(د) $\frac{١}{٢ + \sqrt{٣}ت} - \frac{١}{٢ - \sqrt{٣}ت}$

٢ – أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية :

(أ) $ع^{٢} - ٧ع + ١٠ = ٠$

(ب) $-٣ع^{٢} + ٦ع - ٢ = ٠$

(حـ) $ع^{٣} + ٤ع = ٠$

(د) $ع^{٤} - ٥ع^{٢} + ٤ = ٠$

٣ – لأي عدد مركب ع استنتج متى يكون $\bar{ع} = ع$ ، ومتى يكون $\bar{ع} = -ع$ ؟

٤ – عين مجموعة الحل لكل من العلاقات التالية :

(أ) $ع + \bar{ع} = ٦$

(ب) $ع - \bar{ع} = ٢ت$

(حـ) $|ع| = ١$

(د) $|ع| < ١$

(هـ) $|ع| = |ع|$

(و) $|ع - ١| \doteq ١$

٥ - إذا كانت $ع^2 = (\bar{ع})^2$ فاثبت أن ع إما عدد حقيقي أو تخيلي .

٦ - أثبت أن الضرب في العدد المركب $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (١ + ت) ، (أي التحويل الهندسي ع ⟼ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (١ + ت) ع لكل ع ∈ ك) هو دوران حول نقطة الأصل بزاوية ٤٥° .

٧ - صف التحويلات الهندسية التالية :

(أ) ع ⟼ ع + (٢ + ٣ ت) لكل ع ∈ ك

(ب) ع ⟼ $-\bar{ع}$ (حـ) ع ⟼ - ت ع

٨ - أوجد الجذور التكعيبية للعدد التخيلي ت بحل المعادلة $ع^3$ = ت .

٩ - إذا كان العدد المركب ع هو أحد الجذور التربيعية للعدد المركب جـ فاثبت أن ـع هو الجذر التربيعي الآخر .

١٠ - إذا كان العدد المركب ع هو أحد الجذور التكعيبية للعدد المركب جـ فاثبت أن الجذرين التكعيبين الآخرين هما ع ى و ع ى ، حيث ى = $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت .

١١ - باستخدام قانون دي موافر استنتج القانونين المثلثيين (٣ - ٢٤) ، (٣ - ٢٥) ، المعبرين عن حا ٢ هـ ، حتا ٢ هـ بدلالة النسب المثلثية للزاوية هـ .

(ارشاد : احسب $(\text{حتا هـ} + \text{ت حا هـ})^2$ بطريقتين واستفد من تساوي الناتجين) .

١٢ - أعد التمرين (١١) لحساب حا٣هـ ، حتا٣هـ بدلالة النسب المثلثية للزاوية هـ .

١٣ - اكتب بالشكل المثلثي العدد المركب :

$$\frac{١ + \text{حتا٢س} + \text{ت حا٢س}}{١ + \text{حتا٢ص} + \text{ت حا٢ص}}$$

١٤ - اكتب العدد المركب $\left(\frac{\sqrt{3} - ت}{1 + \sqrt{3}\,ت} \right)^9$ بالصورة : س + ص ت .

أجوبة تمارين الباب الأول

التمارين (١ – ١)

(١) (أ) ٢٢ ، ٢١ ، ٢٣١ ، ٢١١ . (ب) { ٢ ، −١ }

(٢) ١٢ ، ١٥ ، ٣٦

(٣) ٣٣٠ ، ٣٦ ، ٥٥ ، ١٠ ، ٦٤

التمارين (١ – ٢)

(٤) (ب) { ٠ ، ٦ } ، { ١ ، ٥ ، ٩ } ، ϕ

(٥) (أ) ٤ ، $\frac{٣}{١٠}$ ، $\frac{١٥}{٨}$

(٦) (أ) $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{٢٨٩}{١٦}$

التمارين (١ – ٣)

(٣) (أ) ١٢٩ ، ٥٦٧ ، ٤٣٢٠

(٤) (أ) $٣^{٣٢}$ ، $٩^{٠}$ ، ١ ، $٢^{٤٩}$

التمارين (١ – ٤)

(١) (أ) الصفر ، (ب) نظائر عناصر المجموعة على الترتيب ، ٠ ، ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١

(حـ) ٤ ، ٤ ، ٤ ، ٠

(٢) (ب) ١ ، (حـ) نظير ١ = ١ ، نظير ٣ = ٣ (د) { ٠ ، ٢ } ، { ٢ }

(٥) (أ) الصفر

التمارين (١ - ٦)

(١) (أ) ٨ ، (ب) ٨ ، (ج) ٢ ، (د) ١٠

(٢) (أ) {١} ، (ب) ∅ ، (ج) {٧} ، (د) {٣ ، ٧}

(١٢) ٩ ، ٧ ، ١٠ ، ٥ ، ٨ ، ٩

تمارين عامة

(١) (أ) ١٥٩ ، ١٥٩ (ج) الصفر

(٢) (أ) −١٢ ، ٠ (ب) لا (ج) لا ، لا

(٣) (ب) لايوجد

(٦) ١٢ ، ١ ، ٢ ، نعم ، ١١ ، ٣

أجوبة تمارين الباب الثاني

التمارين (٢ - ١)

(١) أولاً : المصفوفة هي =

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٦٥ & ٧٠ & ٢١١ \\ ٦٥ & ٠ & ٤٦ & ٢٢ \\ ٧٠ & ٤٦ & ٠ & ١٨٥ \\ ٢١١ & ٢٢ & ١٨٥ & ٠ \end{bmatrix}$$

ثانياً : (أ) $س_{٢٣} = ٤٦$ (ب) $س_{٣٢} = ٤٦$ (ج) $س_{٣٢} = س_{٢٣}$

(د) الصف الثاني ٦٥ ، ٠ ، ٤٦ ، ٢٢ (هـ) العمود الثاني ٦٥ ، ٠ ، ٤٦ ، ٢٢

(و) عناصر الصف الثاني هي نفس عناصر العمود الثاني

(ز) $س_{١١} = س_{٢٢} = س_{٣٣} = س_{٤٤} = ٠$

(ح) (١) س مصفوفة من النوع ٤ × ٤

(٢) $س_{ى هـ} = س_{هـ ى}$ لجميع قيم هـ من ١ إلى ٤ وجميع قيم ى من ١ إلى ٤

(٢) ا = ٥ ، ب = ٥ ، حـ = ٠ ، د = ١٠

(٣)
$$\begin{bmatrix} \text{هـ} & \text{د} & \text{حـ} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{هـ}' & \text{د}' & \text{حـ}' & \text{ب}' & \text{ا}' \\ \frac{2}{3}\text{هـ} & \frac{2}{3}\text{د} & \frac{2}{3}\text{حـ} & \frac{2}{3}\text{ب} & \frac{2}{3}\text{ا} \\ -2\text{هـ}' & -2\text{د}' & -2\text{حـ}' & -2\text{ب}' & -2\text{ا}' \end{bmatrix}$$

(٤) (ا)
$$\begin{bmatrix} 150 & 150 \\ 100 & 150 \\ 100 & 20 \end{bmatrix}$$

من النوع ٣ × ٢ وعدد العناصر ٦

(ب)
$$\begin{bmatrix} 2\text{ع} - 50 & \text{س} + 50 \\ \frac{20}{3}\text{ل} & \text{ص} \\ 2\text{ع} - \text{س} & \frac{4}{3}\text{ل} \end{bmatrix}$$

(حـ) س = ١٠٠ ، ص = ١٥٠ ، ع = ١٠٠ ، ل = ١٥

التمارين (٢ – ٢)

(١) (ا)
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -9 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

(حـ)
$$\begin{bmatrix} \text{حـ} + 1 & \text{ب} - 1 & \text{ا} + 1 \\ \text{و} + 1 & \text{هـ} + 1 & \text{د} - 1 \end{bmatrix}$$

(د) $\begin{bmatrix} \text{ن} & \text{م} & \text{ل} \\ \text{ى} & \text{و} & \text{هـ} \end{bmatrix}$

(هـ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(و) $\begin{bmatrix} 12 & 8 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}$

(ط) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(ى) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{7}{10} \\ \frac{14}{45} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$

(٢) (أ) $\underline{\text{أ}} + \text{ب} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \text{ب} + \underline{\text{أ}}$

(ب) $(\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}}) + \underline{\text{جـ}} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 0 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} = \text{أ} + (\underline{\text{ب}} + \underline{\text{جـ}})$

(جـ) $\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 0 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} - \text{أ} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -3 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}$

(د) (أ − ب) + جـ = $\begin{bmatrix} -7 & -7 \\ 4 & 2 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$ ، أ − (ب + جـ) = $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

(٣) (أ) $\begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 2 & 4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(هـ) $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

(٤) (أ) $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -5 & 14 \\ 15 & -7 \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 10 & 22 \end{bmatrix}$

(هـ) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}$ (و) $\begin{bmatrix} 20 & -6 \\ 15 & -7 \end{bmatrix}$

(٥) (أ) س = $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$ (ب) س = $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(جـ) س = $\begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & 3 \\ 0 & \frac{25}{4} \end{bmatrix}$ (د) س = $\begin{bmatrix} 3 & -\frac{14}{5} \\ 1 & -\frac{19}{5} \end{bmatrix}$

التمارين (٢ - ٣)

(١) (أ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، (ب) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(حـ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، (د) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(هـ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، (و) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(ز) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، (ح) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(٢) (أ) س ص = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ = − ص س

(ب) س^{2} = م$_{2}$ ، (حـ) ع^{2} = م$_{2}$ ، ص^{2} = − م$_{2}$

(٣) (أ) ٢ × ٣ ، (ب) ٣ × ٣ ، (حـ) ٢ × ٢ ، (د) ٤ × ٣

(هـ) ٣ × ٢ ، (و) ٣ × ٣ ، (ز) ٤ × ٣

(٤) (أ) [٢٨] ، (ب) $\begin{bmatrix} -6 & 3 & -15 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، (د) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 12 \end{bmatrix}$

(هـ) $\begin{bmatrix} -3 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ ، (ز) $\begin{bmatrix} -8 & 2 & -2 \\ -14 & 9 & 38 \end{bmatrix}$

(٥) (أ) صح ، (ب) خطأ ، (حـ) خطأ ،

(د) خطأ ، (هـ) صح

التمارين (٢ – ٤)

(١) (أ) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٤} & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ ، (ب) لايوجد نظير ضربي

(حـ) لايوجد نظير ضربي ، (د) $\begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ \frac{٣}{٢} & -\frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

(هـ) $\begin{bmatrix} -١ & \frac{٣}{٤} \\ ٠ & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$ ، (و) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٦} & -\frac{١}{٢} \\ \frac{١}{١٢} & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$

(ز) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، (ح) $\begin{bmatrix} \frac{١}{\text{أ}} & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{\text{ب}} \end{bmatrix}$

(٢) (أ) س = ٤ ، (ب) س = $\pm$ ٦

(حـ) س = ٤ أو س = – ٢ ، (د) س = ٠ أو س = ٢

(٦) (أ) $\underline{\text{س}}^{-1} = \begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ -\frac{٣}{٢} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ص}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ٠ \\ -\frac{٤}{٣} & \frac{١}{٣} \end{bmatrix}$

(ب) $\underline{\text{س}}^{-1}\underline{\text{ص}}^{-1} = \begin{bmatrix} ٣\frac{١}{٣} & -\frac{١}{٣} \\ -١\frac{٥}{١٢} & \frac{١}{٦} \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ص}}^{-1}\underline{\text{س}}^{-1} = \begin{bmatrix} ٢ & -\frac{١}{٢} \\ -٥\frac{٥}{٦} & \frac{٣}{٢} \end{bmatrix}$

(حـ) $(\underline{\text{س}}\,\underline{\text{ص}})^{-1} = \begin{bmatrix} ٢ & -\frac{١}{٢} \\ -٥\frac{٥}{٦} & \frac{٣}{٢} \end{bmatrix}$

التمارين (٢ – ٥)

(١) (أ) س = ١ ، ص = ٠ (ب) س = ١ ، ص = ١ (حـ) س = − ١٤ ، ع = − ٣

(د) س = ٤ ، ص = − ٥ (هـ) س = ٠ ، ص = − ١ (و) س = ١٢ ، ص = ١٢

(٢) (أ)

$$\begin{bmatrix} ٦٥ & ٢٥ & ٣٥ \\ ٥٥ & ٣٦ & ٤٣ \\ ٧٥ & ٤١ & ٣٧ \\ ٤٠ & ١٢ & ١٦ \end{bmatrix}$$

(ب)

$$\begin{bmatrix} ١٦ & ٣٧ & ٤٣ & ٣٥ \\ ١٢ & ٤١ & ٣٦ & ٢٥ \\ ٤٠ & ٧٥ & ٥٥ & ٦٥ \end{bmatrix}$$

(حـ)

$$\begin{bmatrix} ١٩٥٠ & ٧٥٠ & ١٠٥٠ \\ ١٦٥٠ & ١٠٨٠ & ١٢٩٠ \\ ٢٢٥٠ & ١٢٣٠ & ١١١٠ \\ ١٢٠٠ & ٣٦٠ & ٤٨٠ \end{bmatrix}$$

(د)

$$\begin{bmatrix} ٦٥ \times ١٠^{٥} & ٢٥ \times ١٠^{٣} & ٣٥ \times ١٠^{٤} \\ ٥٥ \times ١٠^{٥} & ٣٦ \times ١٠^{٣} & ٤٣ \times ١٠^{٤} \\ ٧٥ \times ١٠^{٥} & ٤١ \times ١٠^{٣} & ٣٧ \times ١٠^{٤} \\ ٤٠ \times ١٠^{٥} & ١٢ \times ١٠^{٣} & ١٦ \times ١٠^{٤} \end{bmatrix}$$

(٣)

	حـ	ب	أ	
	٨٠	١٠٠	٠	أ
	٧٥	٠	٩٠	ب
	٠	٩٠	٨٠	حـ

(٤) (أ)

	ق	ك
أ	٣	١
ب	١	١
جـ	١	٣

(ب)

	س	ص	ع
ق	٣	٢	٤
ك	١	١	٤

(جـ)

١٠	٧	١٦
٤	٣	٨
٦	٥	١٦

التمارين (٢-٦)

(١) (أ) ٣٠ ، (ب) − ١٢٠ ، (جـ) صفر

(د) − ٤ ، (هـ) صفر ، (و) صفر

(٢) (أ) س = ٢ ، ص = − ١ (ب) س = $-\frac{٩}{١٣}$ ، ص = $\frac{٨}{١٣}$

(جـ) س = $\frac{١٧}{٢٢}$ ، ص = $-\frac{٩}{١١}$ (د) ل = ٠ ، ك = ٠

(٤) س = − ٥ ، ص = − ١٢

(٥) هـ $\in$ ح − {٦}

(٦) (أ) س = ٠ ، ص = ١ ، ع = ٠

(ب) س = $\frac{٥}{١٣}$ ، ص = $\frac{٣}{١٣}$ ، ل = $-\frac{٤}{١٣}$

(حـ) س = $-\frac{١}{٣}$ ، ص = $-\frac{٢٢}{٣}$ ، ع = $\frac{٣٢}{٣}$

(د) س = $-\frac{٢}{٢١}$ ، ص = $-\frac{٢٠}{٧}$ ، ع = $-\frac{٨}{٧}$

(٧) هـ $\in$ ح − {−١}

التمارين العامة

(١) س = $\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 13 \end{bmatrix}$

(٢) (أ) النظير الجمعي = $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$

النظير الضربي = $\begin{bmatrix} -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{4}{11} & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$

(ب) النظير الجمعي = $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$

لايوجد نظير ضربي

(حـ) النظير الجمعي = $\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$

النظير الضربي = $\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

(د) النظير الجمعي = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

لايوجد نظير ضربي

(٣) [٣ س^{٢} + س ص + ٢ ص^{٢}]

(٥) (ب) $\underline{س}^{-١}$ = $\begin{bmatrix} \frac{٢}{٣} & ١- \\ \frac{١}{٣} & ٠ \end{bmatrix}$

(٦) (أ) $\underline{أ}^{٢}$ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

(ب) س = − ٣ ، ص = ١

(٧) (أ) لايوجد حل

(ب) س = − $\frac{٣}{٢٣}$ ، ص = $\frac{٧٧-}{٢٣}$

(٩) (أ) س = $\frac{٧-}{٣٩}$ ، ع = $\frac{٦}{١٣}$ ، ل = − $\frac{٨}{٣٩}$

(ب) س = $\frac{٩}{٥}$ ، ص = − $\frac{٨٧}{٢٠}$ ، ع = − ٣

(حـ) س = $\frac{٩٨}{٧٤٧}$ ، ص = $\frac{٢٢٩}{١٤٩٤}$ ، ع = − $\frac{٥٣}{٤٩٨}$

أجـــوبة تـــمارين الباب الثالث

التمارين (٣ - ١)

(٤) ٢٣ر٥ سم ، ٥٥ر٢٣ سم ، ٩٣ر٢٠ سم ، ٩٤ر٧ سم

(٥) ٥ ر١ راديان

التمارين (٣ - ٢)

(١) $\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٤}{٣}$

(٤) $-\frac{٥}{١٣}$ ، $\frac{١٢}{١٣}$ ، $-\frac{١٢}{٥}$

$-\frac{٥}{١٣}$ ، $-\frac{١٢}{١٣}$ ، $\frac{١٢}{٥}$

(٦) سـالب ، موجـب ، سـالب

(٧) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $-\sqrt{٣}$

(٨) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $-\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

(٩) $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{٤}{٣}$

$\frac{٣}{٥}$ ، $-\frac{٥}{٤}$ ، $-\frac{٤}{٣}$

(١٠) $\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$

$-\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٥}{٣}$ ، $-\frac{٣}{٤}$

(١٦) $\frac{\sqrt{٢}-\sqrt{٦}}{٤}$ ، $-(٢+\sqrt{٣})$ ، $\sqrt{٣}-٢$

(١٧) قتا هـ (١٨) ظتا ^{٢} هـ (١٩) قتا هـ

التمارين (٣ - ٣)

(١) $-\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $-\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، $-\sqrt{٣}$

(٢) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، $-\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، -١ ، -١

(٣) $-\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\sqrt{٣}$

(٤) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، ١ ، ١

(٥) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

(٦) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

(٧) قتا هـ　　　(٨) ظتا هـ

(١٠) حا هـ $= \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ظا هـ $= -\sqrt{٣}$

(١١) حا هـ $= -\frac{١}{٢}$ ، حتا هـ $= -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(١٢) حاهـ $= -\frac{١}{٢}$ ، حتا هـ $= \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

التمارين (٣ - ٤)

(١) |أ حـ| = ١٦ سم ، |ب حـ| = ٨ $\sqrt{٣}$ سم ، |ب د| = ٤ $\sqrt{٣}$ سم

(٣) -٨　　　(٤) (أ) ٥ر٠ ، (ب) ٥ر٠

(٥) (أ) |ب حـ| = ١٦ سم ، |أ حـ| = ٢٤ سم

(٦) ١٤ م　　　(٧) ٥ر٩ قدم

التمارين (٣ - ٥)

(١) (أ) $\frac{\sqrt{٢}}{٤}(\sqrt{٣}-١)$ (ب) $-(٢+\sqrt{٣})$

(جـ) $-\frac{\sqrt{٢}}{٤}(\sqrt{٣}+١)$ (د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(هـ) $-\frac{١}{٢}$ (و) $-\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ (ز) $-\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

(٢) $-\frac{٧}{٢٥}$ ، ٠ ، $-\frac{٢٤}{٧}$

(٤) $\frac{١١٧}{١٢٥}$ ، $-\frac{٣}{٥}$ ، $-\frac{٤}{٥}$ ، $-\frac{٤٤}{١٢٥}$

(٥) $\frac{١}{٨}(٩-٥\sqrt{٥})$ ، $\frac{١}{٨}(٩+٥\sqrt{٥})$

(٦) (أ) ٢ حا هـ حتا ى (ب) ٢ حتا هـ حا ى

(جـ) ٢ حتا هـ حتا ى (د) ٢ حا هـ حا ى

التمارين (٣ - ٦)

(١) $\frac{٢٤}{٢٥}$ ، $\frac{٧}{٢٥}$ ، $\frac{٢٤}{٧}$ ، $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$ ، $-\frac{١}{\sqrt{١٠}}$

(٢) $\frac{٥}{١٣}$ ، $-\frac{١٢٠}{١٦٩}$ ، $\frac{١١٩}{١٦٩}$ ، $-\frac{١٢٠}{١١٩}$

(٣) $\frac{٥}{\sqrt{٢٦}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢٦}}$ ، ٥

(٦) (أ) $-\frac{١}{٢}$ ، (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، (جـ) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، (د) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، (هـ) ١ ، (و) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

التمارين (٣ - ٧)

(١) (أ) $\frac{١}{٤}$ ، (ب) $\frac{\sqrt{٣} - ١}{٤}$ ، (جـ) $\frac{٢ + \sqrt{٣}}{٤}$ ، (د) $\frac{\sqrt{٣} - ١}{٤}$

(هـ) $- \frac{١}{٤}$ ، (و) $\frac{١}{٢}$

(٢) (أ) - ٢ حا ٦ هـ حا ٣ هـ ، (ب) ٢ حتا ٦ هـ حا ٣ هـ

(جـ) ٢ حتا ٥ هـ جتا ٢ هـ ، (د) ٢ حا ٥ هـ حتا هـ

(هـ) - ٢ حا ٤٥° حا ٢٠ ، (و) ٢ حتا ٢٠° حا ٢°

(ز) ٢ حتا ٣٠ حتا ١٥ ، (ح) ٢ حا ٣٠° حتا ١٠°

التمارين (٣ - ٨)

(١) (أ) { $\frac{٧ط}{٦}$ ، $\frac{١١ط}{٦}$ } ، (ب) { ٢١٠° ، ٣٣٠° }

(٢) (أ) { $\frac{ط}{٣}$ ، $\frac{٤ط}{٣}$ } ، (ب) { ٦٠° ، ٢٤٠° }

(٣) (أ) { ٠ ، ط } ، (ب) { ٠ ، ١٨٠° }

(٤) (أ) { $\frac{ط}{٤}$ } ، (ب) { ٤٥° }

(٥) (أ) { ٠ ، $\frac{٢ط}{٣}$ ، ط ، $\frac{٤ط}{٣}$ ، ٢ط } (ب) { ٠ ، ١٢٠° ، ١٨٠° ، ٢٤٠° ، ٣٦٠° }

(٦) (أ) { ٠ ، $\frac{ط}{٢}$ } ، (ب) { ٠ ، ٩٠° }

(٧) (أ) { $\frac{ط}{٢}$ ، $\frac{٣ط}{٢}$ ، $\frac{ط}{٤}$ ، $\frac{٣ط}{٤}$ ، $\frac{٥ط}{٤}$ ، $\frac{٧ط}{٤}$ } (ب) { ٩٠° ، ٢٧٠° ، ٤٥° ، ١٣٥ ، ٢٢٥° ، ٣١٥° }

(٨) (أ) { $\frac{٧ط}{٦}$ ، $\frac{١١ط}{٦}$ } ، (ب) { ٢١٠° ، ٣٣٠° }

(٩) (أ) { $\frac{ط}{٤}$ ، $\frac{٣ط}{٤}$ ، $\frac{٥ط}{٤}$ ، $\frac{٧ط}{٤}$ } ، (ب) { ٤٥° ، ١٣٥° ، ٢٢٥° ، ٣١٥° }

(١٠) (أ) { ٠ ، ط ، $\frac{\text{٢ط}}{\text{٣}}$ ، $\frac{\text{٤ط}}{\text{٣}}$ } (ب) { ٠ ، ١٨٠° ، ١٢٠° ، ٢٤٠° }

(١١) (أ) { $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ ، $\frac{\text{٣ط}}{\text{٢}}$ ، $\frac{\text{ط}}{\text{٤}}$ ، $\frac{\text{٣ط}}{\text{٤}}$ ، $\frac{\text{٥ط}}{\text{٤}}$ ، $\frac{\text{٧ط}}{\text{٤}}$ }

(ب) { ٩٠° ، ٢٧٠° ، ٤٥° ، ١٣٥° ، ٢٢٥° ، ٣١٥° }

(١٢) (أ) { $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ ، $\frac{\text{٧ط}}{\text{٦}}$ ، $\frac{\text{١١ط}}{\text{٦}}$ } (ب) { ٩٠° ، ٢١٠° ، ٣٣٠° }

(١٣) (أ) { $\frac{\text{ط}}{\text{٣}}$ ، $\frac{\text{٥ط}}{\text{٣}}$ ، $\frac{\text{ط}}{\text{٦}}$ ، $\frac{\text{٥ط}}{\text{٦}}$ } (ب) { ٦٠° ، ٣٠٠° ، ٣٠° ، ١٥٠° }

(١٤) (أ) { ٠ ، ط ، $\frac{\text{ط}}{\text{٣}}$ ، $\frac{\text{٥ط}}{\text{٣}}$ } (ب) { ٠ ، ١٨٠° ، ٦٠° ، ٣٠٠° }

(١٥) (أ) { س = $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ + م ط ، س = $\frac{\text{ط}}{\text{٤}}$ + م ط ، م ∈ ص
(١٦) (أ) { س = ١٨٠ ك ، س = − ٤٥° + ١٨٠ك ، ك ∈ ص

التمارين (٣ – ٩)

(١) حـ^ = ٤٣° ، بَ = ٢٢ ر ١٤٢ ، حـَ = ١٠٠ر٤٢

(٢) لايوجد للمثلث حل

(٣) حـ^ = ٨٠° ٤٨′ ، أ^ = ٣٧° ٢′ ، أَ = ٣٩ ر ١٥٥

(٤) أَ = ٤٩ ر٨ ، ب^ = ٢٠° ٢١′ ، حـ^ = ١٢٣° ٢٧′

(٥) أَ = ٣٢ ر١٢٩ ، بَ = ٥٨ ر١٥٢ ، ث^ = ٤٣′ ، ٤٩

(٦) أ^ = ٣٦° ٤٨′ ، ب^ = ٥٣° ١٢′ ، حـ^ = ٩٠°

(٧) حـ^ = ٣٨° ٢٧′ ، ب^ = ٥١° ٢٣′ ، ث^ = ٣٤١١,١٧

(٨) ٢٣٦ وحدة مربعة .

(١٠) ب^ = حـ^ = ١٩° ٤٨′ ، |ب حـ| = أَ = ٧٤٤٨و ٦٧ متراً

(١١) ب^ = ٩٠° ، حـ^ = ٣٠° بَ = ١٦ سم ، حـَ = ٨ سم

(١٢) ١٢٠,٢١ سم .

(٣) ٨ ر٠ راديان

(٤) (أ) $\pm\frac{٣}{٥}$ ، (ب) $\pm\frac{٣}{٤}$ ، (حـ) $\pm\frac{٣}{٥}$

(د) $-\frac{٤}{٥}$ ، (هـ) $\frac{٤}{٥}$ ، (و) $\pm\frac{٣}{٥}$

(ز) $\mp\frac{٣}{٥}$ ، (حـ) $-\frac{٤}{٥}$ ، (ط) $\pm\frac{٤}{٣}$

(٥) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، −٧٦٦٠٤٤٤ر٠ ، ٧٦٧٩١١ر٠ ، ٢ر٧٤٧٤٧٧٤ ، $\frac{\sqrt{٢}}{٤}-$ $(\sqrt{٣}-١)$

(٦) ٩٨ر٢٥ م = ٢٦م

(٧) ٥رام ، ٣م

(٨) (أ) $\frac{-٤}{\sqrt{٥}}$ (ب) $\frac{٤\sqrt{٥}+٥٠}{٥٥}$

(٩) (أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ ، (حـ) $\sqrt{٣}$

(١٤) (أ) $\{\frac{٢ط}{٣}، \frac{٤ط}{٣}، ط\}$ (ب) $\{١٢٠°، ٢٤٠°، ١٨٠°\}$

(١٥) (أ) $\{\frac{ط}{٣}، \frac{٥ط}{٣}\}$ (ب) $\{٦٠°، ٣٠٠°\}$

(١٦) (أ) $\{\frac{ط}{٦}، \frac{٥ط}{٦}، \frac{٧ط}{٦}، \frac{١١ط}{٦}\}$ (ب) $\{٣٠°، ١٥٠°، ٢١٠°، ٣٣٠°\}$

(١٧) $\hat{ب}$ = ٣٤° ٥٠َ ، $\hat{أ}$ = ١١٦° ٤٥َ ، أ = ٩ر٣٨

(١٨) أ = ٧ر٠١٠ ، $\hat{ب}$ = ٥٢° ٥٣َ ، $\hat{حـ}$ = ٨٥° ٧َ

(١٩) حـ = ٢٧ر٣٩٠ ، ب = ٠٤ر٣٢٤

(٢٢) س = ١٢٠°

أجابة تـمارين البـاب الرابع

التمارين (٤ - ١)

(١) حـ (١٦ ، ٥)

(٢) أ : (٠ ، $\frac{١}{٢}$) ، ب {(٠ ، ١) (٠ ، - ١)} ، حـ : {($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) ، (- $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، - $\frac{١}{\sqrt{٢}}$)}

التمارين (٤ - ٢)

(١) أ : $\frac{١}{٢}$ - $\frac{١}{٢}$ ت ، ب : ت ، حـ : $\frac{٧}{١٣}$ - $\frac{٤}{١٣}$ ت ، د : - ت

(٥) ١ ، ت ، - ت ، ١ ، ١ ، ١ ، ت ، - ١ ، - ت

(٦) ٢ ، ١ + $\frac{٤}{٥}$ ت ، $\frac{٧١}{٢٥}$ - $\frac{٢٠٣}{٢٥}$ ت ، ٠ ، - ١

(٧) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ ت ، - $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ ت ، - $\frac{١}{٤}$

(٩) {١ ، - ١ ، ت ، - ت}

التمارين (٤ - ٣)

(٥) ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (١ + ت)

(٦) ± $\frac{١}{٢}$ ($\sqrt{٣}$ + ت)

(٧) ± (٢ - ت)

(٨) $\frac{٤}{٢٥}$ ، $\frac{٣}{٢٥}$

(٩) س = ص = - $\frac{٥}{\sqrt{٢}}$

(١٠) س = ص = ٠

(١٢) { – ١ ، – ت ، ت }

(١٣) ± ت

(١٤) { $\sqrt{٢}$ ، – $\sqrt{٢}$ ، ت ، – ت }

التمارين (٤ – ٤)

(٢) (أ) ٦ (جتا ١٨٠° + ت جا ١٨٠°) (ب) ٢ $\sqrt{٣}$ (جتا ٣٠٠° + ت جا ٣٠٠°)

(هـ) ١ (جتا ٩٠° + ت جا ٩٠°) (د) ٧ $\sqrt{٢}$ (جتا ٢٢٥° + ت جا ٢٢٥°)

(٦) – ٦

(٧) – ت ، ٣٢ ت ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ ت ، – ٨١٩٢ (١ + $\sqrt{٣}$ ت)

(٨) ١ – ت ، $\sqrt{٢}$ (جتا ٧٥° + ت جا ٧٥°) ، – $\sqrt{٢}$ (جتا ١٥° + ت جا ١٥°)

التمارين (٤ – ٥)

(١) { ٣ ، ٣ ى ، ٣ ى̄ } ، { $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ى ، $\frac{٣}{٥}$ ى̄ }

(٣) { ت ، ت ى ، ت ى̄ }

(٦) $\sqrt[٣]{س}$ ، $\sqrt[٣]{س}$ ى ، $\sqrt[٣]{س}$ ى̄

(١) $\frac{١}{٤} + \frac{\sqrt{٣}}{٤}$ت ، ١٦ ، −١ ، $-\frac{\sqrt{٣}}{٧}$ت

(٢) {٥ ، ٢} ، −١ ± $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ت ، {٠ ، ٢ت ، −٢ت} ، {١ ، −١ ، ٢ ، −٢}

(٨) {−ت ، −ت ى ، −ت ى̄}

(١١) حتا ٢ هـ = $حتا^٢$هـ − $حا^٢$هـ ، حا ٢ هـ = ٢ حا هـ حتا هـ

(١٢) حتا ٣ هـ = ٤ $حتا^٣$هـ − ٣ حتا هـ

حا ٣ هـ = ٣ حا هـ − ٤ $حا^٣$هـ

(١٣) $\frac{\text{حتاس}}{\text{حتاص}}$ [حتا (س − ص) + ت حا (س − ص)]

(١٤) − ت


العبيكان
Obeikan
Printing & Packaging
Tel (01) 265 1144